

Nombres complexes

I L'ensemble des nombres complexes	2
Définition de $\mathbb{C}$, représentation géométrique	
Conjugué	
Module d'un nombre complexe	
II L'ensemble $\mathbb{U}$	6
III Formules d'Euler et de Moivre.	7
IV Forme trigonométrique, argument	8
V Exponentielle complexe	9
VI Résolution d'équations.	10
Racine d'une fonction polynomiale	
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines n -èmes d'un nombre complexe	
VII Un peu de géométrie	15
Alignement et orthogonalité	
Transformations remarquables du plan	



I. L'ensemble des nombres complexes

Définition de $\mathbb{C}$, représentation géométrique

La construction de l'ensemble des nombres complexes est hors-programme. On admet donc qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$,

- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$), avec lesquelles on calcule comme dans $\mathbb{R}$,
- possédant un élément noté i dont le carré vaut -1 ,
- dont tout élément, appelé *nombre complexe* ou *complexe*, s'écrit de manière unique sous la forme $x + i \cdot y$ ou encore $x + iy$, avec x et y réels.

Ainsi :

- pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$; les réels x et y sont alors respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du complexe z , et l'on note alors :

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im} z ;$$

- si $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et si l'on pose $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $x' = \operatorname{Re} z'$, $y' = \operatorname{Im} z'$, alors (en utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$) on a :

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ z z' &= (x x' - y y') + i(x y' + y x') ; \end{aligned}$$

- un complexe z est réel si et seulement si $\operatorname{Im} z = 0$ (autrement dit le réel x s'identifie au nombre complexe $x + 0i$) ;
- en particulier, le complexe $0 + 0i$ se note simplement 0 . Il coïncide avec le 0 de $\mathbb{R}$. Un nombre complexe z est nul s'il est égal à 0 , ce qui est encore équivalent à $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$;
- les complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés *imaginaires purs*; z est donc imaginaire pur si, et seulement si, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Conséquences de l'unicité de l'écriture

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
- On a, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z + z') &= \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z' & \text{et} & \quad \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z', \\ \operatorname{Re}(z z') &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} z' - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} z' & \text{et} & \quad \operatorname{Im}(z z') = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z' + \operatorname{Re} z' \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

- Pour tout complexe z , le complexe $-z = -\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ est appelé opposé de z . C'est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.
- Tout complexe $z \neq 0$ possède un inverse unique (pour la multiplication) car, si $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$, alors :

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \quad \text{vérifie} \quad z z' = z' z = 1.$$

On peut trouver z' en cherchant x' et y' vérifiant le système :

$$x x' - y y' = 1 \quad \text{et} \quad x y' + y x' = 0,$$

mais on donnera une méthode plus immédiate pour trouver ce résultat.

Cet inverse z' est noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

- On en déduit, comme dans $\mathbb{R}$, que si les complexes z et z' vérifient $z z' = 0$, alors on a $z = 0$ ou $z' = 0$.
En effet, si $z \neq 0$, alors en multipliant l'égalité $z z' = 0$ par z^{-1} , on obtient $z' = 0$.

Attention.

Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une relation d'ordre compatible avec les opérations, c'est-à-dire pour laquelle le produit de deux nombres positifs est positif et l'opposé d'un nombre positif est négatif.



Représentation géométrique

Le plan usuel étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tout point M est caractérisé par un unique couple de coordonnées (x, y) vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$:

- le complexe $z = x + iy$ est alors appelé *affixe de M* ;
- le point M est aussi appelé *image de z* .

Dans toute la suite de ce chapitre, *l'image de z est notée M_z* .

De même, pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, le complexe $z = x + iy$ est aussi appelé *affixe du vecteur $\vec{u}$* .

1

Proposition.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs d'affixes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, et λ un réel, alors l'affixe de $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est $z_1 + z_2$ et celle de $\lambda \vec{u}_1$ est λz_1 .

Si A et B sont deux points d'affixes a et b , alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Conjugué

2

Définition.

Pour tout complexe z , on appelle *conjugué* de z le complexe $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

3

Proposition (Parties réelle et imaginaire en fonction du conjugué)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

4

Proposition ($\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$) Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a les équivalences

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$$

Un nombre complexe est réel si et seulement si son conjugué lui est égal.

Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si son conjugué est égal à son opposé.

5

Proposition (Règles de calcul).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\bar{z}} = z$.

Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ si } z_2 \neq 0.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \quad \overline{z_1 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \dots + \bar{z}_n \quad \text{et} \quad \overline{z_1 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ car :

$$z\bar{z} = (\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

6

Définition.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le *module* de z est le réel positif noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

- Lorsque le complexe z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue et ils se notent l'un et l'autre $|z|$.
- Pour calculer $|z|$ ou l'utiliser, ne pas vouloir systématiquement appliquer la formule $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$; penser aussi à $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Comme $|z| \geq 0$, on a l'équivalence très pratique $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$.

7

sol → 21

Question. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur z , a-t-on $|z'| = 1$?

8

Interprétation géométrique du module

- Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors $|z_1 - z_2|$ est la distance entre les points M_{z_1} et M_{z_2} .

Preuve. Écrivons z_1 et z_2 sous forme algébrique : $z_1 = x_1 + i y_1$ et $z_2 = x_2 + i y_2$.
Par définition du module, on a alors :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = M_{z_1} M_{z_2}.$$

- Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

L'ensemble des points M_z tels que $|\omega - z| = r$ (resp. $|\omega - z| \leq r$) est le cercle (resp. le disque) de centre M_ω et de rayon r .

9

sol → 21

Question (bis). Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

Démontrer géométriquement l'équivalence $|z'| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le fait que le module d'un quotient est le quotient des modules.

10

preuve

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

- * $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- * $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- * $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- * $|\operatorname{Re} z| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $|\operatorname{Im} z| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
- * $\operatorname{Re} z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$ et $\operatorname{Im} z = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^+$

11

preuve

Proposition.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

— On a $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. L'inverse est égal au conjugué, à l'inverse du carré du module près.

— On a $\bar{z} = \frac{1}{z} \times |z|^2$. Le conjugué est égal à l'inverse, au carré du module près.

— En particulier, $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$.

Sur le cercle trigonométrique, le conjugué et l'inverse sont égaux; et réciproquement.



En particulier, si $z = x + iy$, avec x et y réels, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

12 Question. Soit a, b, c trois complexes de module 1. Montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

sol → 21

13 Proposition (Module d'un produit et d'un quotient). Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

preuve

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{et} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{si } z_2 \neq 0$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, on a $|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|$.
En particulier, pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|z^n| = |z|^n$.

14 Question. Soit deux entiers dont chacun est la somme de deux carrés d'entiers.

Montrer que leur produit est aussi la somme de deux carrés d'entiers.

sol → 22

15 Proposition (Inégalité triangulaire). Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

preuve

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Le cas d'égalité :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z_2 = \lambda z_1$$

Il résulte de l'inégalité triangulaire, par une récurrence immédiate que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

16 Interprétation géométrique.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On pose $N = M_{z_1+z_2}$.

On a $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_{z_1}} + \overrightarrow{OM_{z_2}}$ si bien que $OM_{z_1}NM_{z_2}$ est un parallélogramme.

Alors z_2 est l'afixe de $\overrightarrow{M_{z_1}N}$, si bien que l'inégalité $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ correspond à :

$$ON \leq OM_{z_1} + M_{z_1}N.$$

On retrouve l'inégalité triangulaire au sens de la géométrie plane dans le triangle $OM_{z_1}N$.

La condition « $z_1 = 0$ ou $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ » de la proposition précédente signifie géométriquement que les vecteurs $\overrightarrow{OM_{z_1}}$ et $\overrightarrow{M_{z_1}N}$ sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire que M_{z_1} appartient au segment $[ON]$.

17 Proposition (Seconde inégalité triangulaire). Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

preuve

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

18 **Proposition (La totale !).** Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

II. L'ensemble $\mathbb{U}$

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Les règles de calcul sur les modules des produits et quotients de nombres complexes nous donnent immédiatement :

- Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.
- L'inverse de tout élément de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. En effet, puisque $|z| \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$.

19 **Définition.** Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Lorsque $\theta = 0$, alors on a $e^{i\theta} = 1$; ainsi, cette nouvelle définition est compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.

Il nous arrivera de noter également $e^{i\theta}$ sous la forme $\exp(i\theta)$.

20 **Proposition.**

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
- Réciproquement, pour $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
- Si θ et φ sont deux réels, on a

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi [2\pi]$$

21 **Proposition.** Pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

preuve



III. Formules d'Euler et de Moivre

22 **Proposition.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

23 **Question.** Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Montrer, à l'aide de la formule d'Euler, la formule de **linéarisation** :

$$\cos \theta \cos \theta' = \frac{\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')}{2}$$

24 **Question.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule d'Euler, linéariser $\cos^3 \theta$, puis linéariser $\sin^3 \theta$.

sol → 23

25 **Proposition (Angle moitié).** à ne pas apprendre, à savoir retrouver

Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left[-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- Concrètement, pour retrouver ces formules, on force la factorisation par $e^{i\frac{p+q}{2}}$. Le deuxième facteur est alors un réel ou un imaginaire pur.
- En considérant des expressions de la forme $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$ comme les parties réelles ou imaginaires de $e^{ip} \pm e^{iq}$, on retrouve les formules trigonométriques qui en donnent une factorisation.

26 **Question.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donner le module de $1 + e^{i\theta}$ et faire un dessin pour illustrer le résultat.

sol → 23

27 **Proposition (Formule de Moivre).**

preuve

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On a

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

ou encore

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ou encore

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^n\right) \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^n\right)$$

- La première formulation paraît vide de sens, mais n'oublions pas que $e^{i\theta}$ est, a priori, une notation, et que l'on montre à présent que c'est une bonne notation, puisque se comportant comme l'exponentielle réelle!
- La deuxième formulation montre que l'on peut facilement élever à la puissance n un nombre complexe de module 1 (et donc, comme nous le verrons, tout nombre complexe!)
- La dernière formulation montre que l'on peut exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

28 **Question.** Montrer que $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

sol → 25

29 **Question.** Exprimer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

sol → 25

IV. Forme trigonométrique, argument

30

Proposition.

- Soit z un complexe **non nul**. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r e^{i\theta}$.
- Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $(r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On a :

$$r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \implies r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

31

Définition.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

On appelle *forme trigonométrique* de z toute écriture de la forme :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*.$$

Un tel réel θ est appelé **un** argument de z .

Un tel réel r est appelé **le** module de z .

- Lorsqu'un nombre complexe z est mis sous forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$, alors

$$r = OM_z \text{ et } \theta \text{ est une mesure de l'angle } (\vec{i}, \overrightarrow{OM_z}),$$

donc les réels r et θ forment un couple de *coordonnées polaires* de M_z .

- Le module d'un nombre complexe est défini de manière unique : tout complexe, même 0, possède un module.
- En revanche, on ne parle d'argument que pour un complexe **non nul**, et un tel réel n'est défini que modulo 2π .
- En imposant θ à appartenir à un $[0, 2\pi[$, on récupère de l'unicité et on pourrait alors parler de **l'argument** de z . Mais on pourrait aussi prendre $]-\pi, \pi]$ ou
Donc, officiellement, en toute rigueur, on dit **un** argument.
Mais il faut savoir être léger, et il nous arrivera tous, un jour, de parler de **l'argument** de z : dans ce cas, il faudra avoir en tête que c'est un abus de langage.
Les mathématiciens ont quand même fait un choix pour pouvoir parler de **l'argument** d'un complexe non nul. Celui qui appartient à $]-\pi, \pi]$ s'appelle **l'argument principal**.
- Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument à 2π -près.
- Bien que 0 n'ait pas d'argument, on peut quand même écrire $0 = r e^{i\theta}$, en prenant $r = 0$ (et $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque).
- Pour $z \in \mathbb{C}^*$, en notant θ un argument de z , on a :

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \theta \equiv 0 [\pi] \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}_+^* \iff \theta \equiv 0 [2\pi] \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R}^* \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Attention. Si un complexe z s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, il ne s'agit pas nécessairement de la forme trigonométrique de z .

En effet, on a $|z| = |\rho|$ et donc :

- si $\rho > 0$, alors $|z| = \rho$, et un argument de z est θ ,
- si $\rho < 0$, alors $|z| = -\rho$, et un argument de z est $\theta + \pi$,
- si $\rho = 0$ alors $z = 0$, et z n'a pas d'argument.

32

Question. Soit $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.
sol → 25 Donner la forme trigonométrique de $z = 1 + e^{i\theta}$ en fonction de θ .

33

Calculs

Il est aisé de calculer des produits, des quotients et des puissances de nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique.



Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors on a :

$$\overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1} \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1} \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

On en déduit que

34

Proposition. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On a :

- * $\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1) [2\pi]$
- * $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1) [2\pi]$
- * $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$
- * $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

35

sol → 25

Question. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $z_n = (1 + i\sqrt{3})^n$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur n , le complexe z_n appartient-il à $\mathbb{R}^-$?

36

preuve

Proposition.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On écrit z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique $z = a + ib$ et $z = r e^{i\theta}$. Alors, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$

V. Exponentielle complexe

On suppose ici connues les propriétés de la fonction exponentielle réelle étudiée en classe de première.

37

Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe e^z par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

- La fonction exponentielle $z \mapsto e^z$, notée $\exp$, ainsi définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:
 - prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, puisque, si $z \in \mathbb{R}$, alors on a $\operatorname{Im} z = 0$ et donc $e^{i \operatorname{Im} z} = 1$;
 - est compatible avec la notation $e^{i\theta}$ puisque, si $z = i\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ alors, on a $\operatorname{Re} z = 0$ et donc $e^{\operatorname{Re} z} = 1$.

38

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- On a $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \in \mathbb{R}_+^*$.
- Le complexe e^z est *non nul*.
- Le nombre réel $\operatorname{Im} z$ est un argument de e^z .

39

Proposition.

- Si z et z' sont deux complexes, alors on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.



40 **Question.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.
sol → 26

41
preuve

Proposition. Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

- Il existe un complexe z tel que $e^z = a$.
- Si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $e^{z_0} = a$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = a$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z_0 + i2k\pi$.

42 **Question.** Résoudre l'équation $e^z = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
sol → 26

43 **Question.**

- $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad e^x = e^{x'} \iff \dots\dots$
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \dots\dots$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^{z'} \iff \dots\dots$

VI. Résolution d'équations

Racine d'une fonction polynomiale

Une *équation algébrique* est une équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, de la forme $P(z) = 0$, où P est une fonction polynomiale.

Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes, un complexe a tel que $P(a) = 0$ est appelé une *racine* de P .

On parle en général de solutions d'une équation, mais une solution d'une équation algébrique sera aussi appelée une racine de l'équation.

44 **Proposition.**

Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes et a une racine de P . Alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - a)Q(z).$$

- Il est clair que, réciproquement, si $P(z)$ est factorisable par $z - a$, alors a est une racine de P .
- Si P est de degré n , alors Q est de degré $n - 1$.
- Pour l'instant, la preuve est admise.

45 **Question.** Soit P la fonction polynomiale définie par $P : z \mapsto z^3 - 2z^2 - 5z + 6$.
sol → 27 Montrer que $P(1) = 0$ et expliciter Q tel que $P(z) = (z - 1)Q(z)$ pour tout z .

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un complexe

46 **Définition.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de z tout complexe Z tel que $Z^2 = z$.

47 **Proposition.** Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
preuve



- Le réel 0 ne possède qu'une seule racine carrée qui est 0.
- On sait que tout réel strictement positif a possède deux racines carrées qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; rappelons que $\sqrt{a}$ désigne la racine positive de a .
- Soit a est un réel strictement négatif. Ses deux racines carrées sont $\pm i\sqrt{|a|}$.
Contemplez les équivalences :

$$\begin{aligned} Z^2 = a &\iff Z^2 = -|a| \\ &\iff Z^2 = (i\sqrt{|a|})^2 \\ &\iff (Z - i\sqrt{|a|})(Z + i\sqrt{|a|}) = 0 \\ &\iff Z = i\sqrt{|a|} \text{ ou } Z = -i\sqrt{|a|} \end{aligned}$$

- On ne sait pas, dans $\mathbb{C}$, privilégier l'une des deux racines d'un complexe z , contrairement à ce qui se passe lorsque $z \in \mathbb{R}_+$ où l'on choisit, parmi les deux racines carrées de z , celle qui est positive que l'on note alors $\sqrt{z}$. Par suite :
 - il est impossible d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe z quelconque;
 - il faut donc parler d'une (article indéfini) racine carrée de z et non pas de la (article défini) racine carrée de z .

48 Question. Déterminer les racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$.

sol → 27

49 Détermination des racines carrées sous forme algébrique.

L'utilisation de formes trigonométriques donne facilement les expressions des racines carrées d'un nombre complexe non nul quelconque, mais on a parfois besoin d'exprimer une racine de z sous forme algébrique, *i.e.* sans utilisation de fonctions trigonométriques.

On a vu ci-dessus comment faire lorsque $z \in \mathbb{R}$.

On traite ici le cas $z \notin \mathbb{R}$. Écrivons z sous forme algébrique $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

Analyse. Supposons qu'il existe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^2 = z$.

Écrivons $Z = X + iY$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

En particulier, on en déduit

- l'égalité des modules : $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$; (i)
- l'égalité des parties réelles : $X^2 - Y^2 = x$; (ii)
- l'égalité des parties imaginaires : $2XY = y$ (iii)
(comme $y \neq 0$, cela entraîne $X \neq 0$ et $Y \neq 0$).

Par somme et différence de (i) et (ii), on obtient X^2 et Y^2 , et donc X et Y au signe près, soit quatre possibilités puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$.

Bref, avec (i) et (ii), on trouve quatre couples (X, Y) , $(X, -Y)$, $(-X, Y)$, $(-X, -Y)$.

D'après (iii), le produit XY est du signe de y .

Parmi les quatre couples précédents, il n'y en a donc plus que deux.

D'où deux valeurs possibles pour Z .

Synthèse. Les deux racines carrées Z trouvées dans l'analyse sont nécessairement solutions. En effet, on sait (d'après 47) qu'il y en a exactement deux. Comme on en a trouvé au plus deux, c'est qu'on les a toutes trouvées.

50 Exemple. Déterminons sous forme algébrique les racines carrées de $21 - 20i$.

Supposons qu'il existe $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = 21 - 20i$.

Alors, en traduisant l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires, on a :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 &= \sqrt{21^2 + 20^2} = 29 \\ X^2 - Y^2 &= 21 \\ 2XY &= -20 \end{cases}$$

Par somme et différence, on en déduit $X^2 = 25$ et $Y^2 = 4$, et donc $X = \pm 5$ et $Y = \pm 2$.

Comme $2XY \leq 0$, on a $(X, Y) = (5, -2)$ ou $(X, Y) = (-5, 2)$.

Ainsi, les racines carrées potentielles de $21 - 20i$ sont $5 - 2i$ et $-5 + 2i$.

Comme on sait par ailleurs qu'il y en a exactement deux, ce sont exactement celles-là.



51 Question.

sol → 28

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z = 1 + i$.
2. En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

52 preuve

Proposition. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (E)$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ une racine carrée de Δ , l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double $\frac{-b}{2a}$.

- Dans les deux cas, les solutions sont données par $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ en notant δ un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
Un tel complexe existe, c'est là toute la différence avec le monde des réels!

- Si l'on remplace tous les $\mathbb{C}$ par des $\mathbb{R}$, le résultat est très similaire!

Voici votre résultat de 1^{ère} :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (E)$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors en appelant δ une racine carrée de Δ , l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Note : il est d'usage de prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, mais on pourrait prendre $\delta = -\sqrt{\Delta}$...

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double $\frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'a pas de solution.

- Si on garde les coefficients dans $\mathbb{R}$, mais que l'on cherche les solutions dans $\mathbb{C}$, on retrouve le théorème de Terminale :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ une racine carrée de Δ , l'équation admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Note : il est d'usage de prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$ lorsque $\Delta > 0$ et de prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ lorsque $\Delta < 0$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double $\frac{-b}{2a}$.

53 Exemple. Résolvons l'équation $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Le discriminant de l'équation est :

$$\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 5i) = -3 + 4i.$$

Déterminons une racine carrée $u + iv$ de Δ .

En considérant le module, les parties réelle et imaginaire de $(u + iv)^2 = \Delta$, on obtient :

$$u^2 + v^2 = 5, \quad u^2 - v^2 = -3 \quad \text{et} \quad 2uv = 4.$$



Par somme et différence, on en déduit $u^2 = 1$ et $v^2 = 4$, et donc :

$$u = \pm 1 \text{ et } v = \pm 2.$$

Le signe de uv entraîne que les deux racines carrées de Δ sont $\pm(1 + 2i)$.

Les solutions sont $\frac{(3 + 4i) \pm (1 + 2i)}{2}$, c'est-à-dire :

$$2 + 3i \quad \text{et} \quad 1 + i.$$

54 Retour sur une équation du passé. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

55 Question. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $6z^2 - (5 - i)z + 2 - \frac{5i}{6} = 0$.

sol → 28

Relations entre coefficients et racines

56
preuve

Proposition. Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$.

Si z_1 et z_2 sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on a :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

On utilise ce résultat sous plusieurs formes.

- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.
- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on peut exprimer toute expression symétrique en z_1 et z_2 (c'est-à-dire invariante quand on échange z_1 et z_2), en fonction de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, et donc de a, b et c , sans avoir à expliciter z_1 et z_2 .

57 Question. On considère l'équation $z^2 - \sqrt{78}z + 13 = 0$ de discriminant > 0 . On note z_1, z_2 ses deux racines. Calculer $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2$ sans expliciter z_1 et z_2 .

sol → 29

58

Proposition. Soit $s, p \in \mathbb{C}$.

On a l'équivalence :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases} \iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } z^2 - sz + p = 0$$

Si l'on change tous les $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$ dans la proposition précédente, l'équivalence reste vraie.

Le seul changement est que l'équation $x^2 - sx + p = 0$ n'a pas nécessairement de solution ; elle en a si et seulement si $s^2 - 4p \geq 0$.

Racines n -èmes d'un nombre complexe

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

59

Définition.

- Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de z* tout complexe Z tel que $Z^n = z$.
- Les racines $n^{\text{ème}}$ de 1 sont encore appelées *racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité*.
L'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est noté U_n .



60 Exemple.

Les racines cubiques de l'unité sont

$$1, \quad j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = \bar{j}.$$

Les images de ces racines, M_1 , M_j et M_{j^2} , forment le triangle équilatéral ci-contre. On a l'égalité remarquable :

$$1 + j + j^2 = 0.$$

61 Proposition (Description de $\mathbb{U}_n$).

Il existe exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, qui sont les complexes :

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k, \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Autrement dit :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\}_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_n \text{ possède } n \text{ éléments}$$

62 Proposition (Somme des racines de l'unité).

Soit $n \geq 2$.

— Si ξ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1, on a :

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} = 0.$$

— La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est égale à 0.

63 Question. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines $n^{\text{ème}}$ de 1.

sol → 29

64 Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si ω_0 est une racine $n^{\text{ème}}$ de z , alors l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de z est :

$$\left\{ \omega_0 \xi \right\}_{\xi \in \mathbb{U}_n} \quad \text{qui s'écrit encore} \quad \left\{ \omega \in \mathbb{C} \mid \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \omega = \omega_0 \xi \right\}$$

Pour trouver toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de z , il suffit donc d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

65 Question. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

sol → 29

66 Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $z \neq 0$ de module r et d'argument θ .

Le complexe z admet exactement n racines $n^{\text{ème}}$ qui sont les complexes :

$$r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

67 Question. Déterminer les racines cinquièmes de $1 + i$. Illustrer votre réponse.

sol → 30



VII. Un peu de géométrie

Alignement et orthogonalité

68

preuve

Proposition. Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Alors le complexe $\frac{z_2}{z_1}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, ce que l'on peut résumer :

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) [2\pi]$$

En particulier :

- les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$;
- les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

69

Proposition. Soit A, B et C trois points du plan, distincts et d'affixes respectives a, b et c .

Le complexe $\frac{c-a}{b-a}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

En particulier :

- les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Transformations remarquables du plan

Si F est une application du plan dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait

$$M' = F(M) \iff z' = f(z)$$

Réciproquement, l'application f caractérise F .

On dit que F est représentée par f dans le plan complexe.

70

Définition. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La *translation* de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M , associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

71

preuve

Proposition. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et b son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z + b$$

72

Définition. Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'*homothétie* de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout M , associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

73

preuve

Proposition. L'homothétie de centre Ω , d'affixe ω , et de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \lambda(z - \omega) + \omega$$



- En particulier, une homothétie de centre O est représentée par une application de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- La symétrie par rapport au point Ω , d'affixe ω , est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 . Elle est donc représentée par l'application $z \mapsto -z + 2\omega$.

74

Définition. Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La *rotation* de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω , et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\Omega M = \Omega M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi].$$

75

preuve

Proposition. La rotation r de centre Ω , d'affixe ω , et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

- En particulier, une rotation de centre O est représentée par une application de la forme $z \mapsto az$, avec a complexe de module 1.

76

sol → 31

Question. Déterminer l'application qui représente la rotation de centre $1 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

77

preuve

Proposition. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et F la transformation du plan représentée par $f : z \mapsto az$.

- Si $a = 1$, alors l'application F est l'identité du plan.
- Si $a \neq 1$, alors l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$, avec :
 - R la rotation de centre O et d'angle α , où α est un argument de a ,
 - H l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

Examinons deux cas particuliers de la proposition précédente dans laquelle $a \in \mathbb{C}^*$;

- si a est un *réel*, alors l'application F est l'homothétie de centre O et de rapport a (si $a = 1$, on obtient l'identité).;
- si le complexe a est de module 1, l'application F est la rotation de centre O et d'angle α (si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, alors F est l'identité).

78

Exemple. Caractérisons l'application F dont l'expression complexe est $z \mapsto (-\sqrt{3} + i)z$.

$$\text{On a } -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

L'application F est donc la composée

- de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et
- de la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

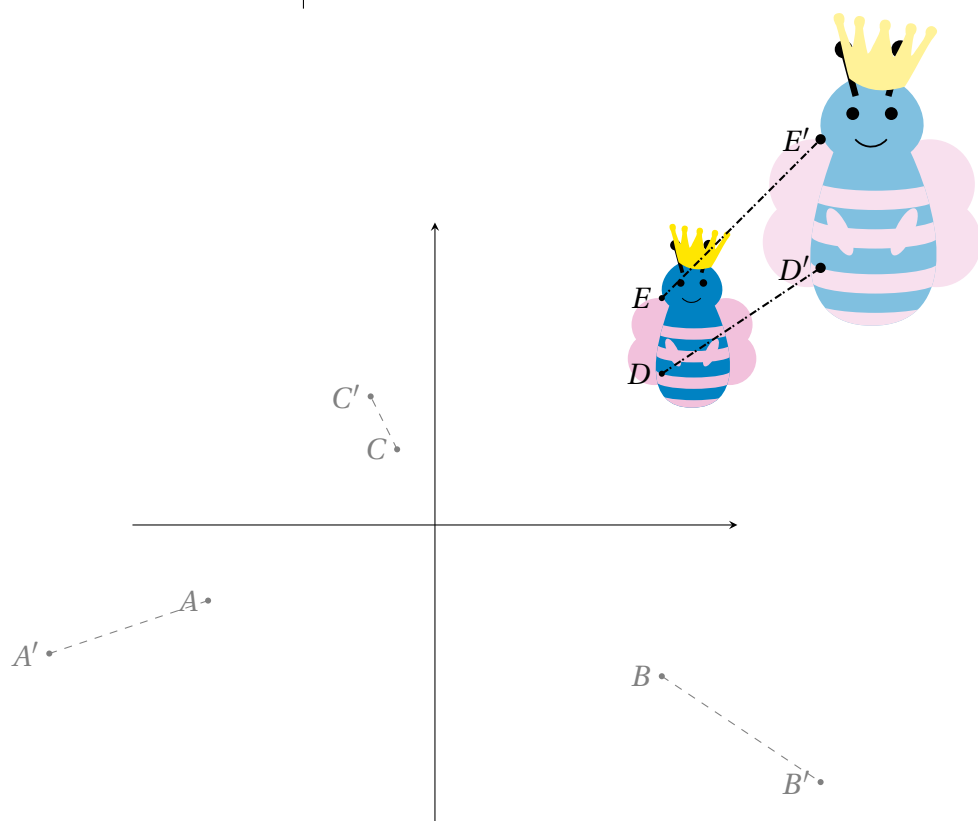
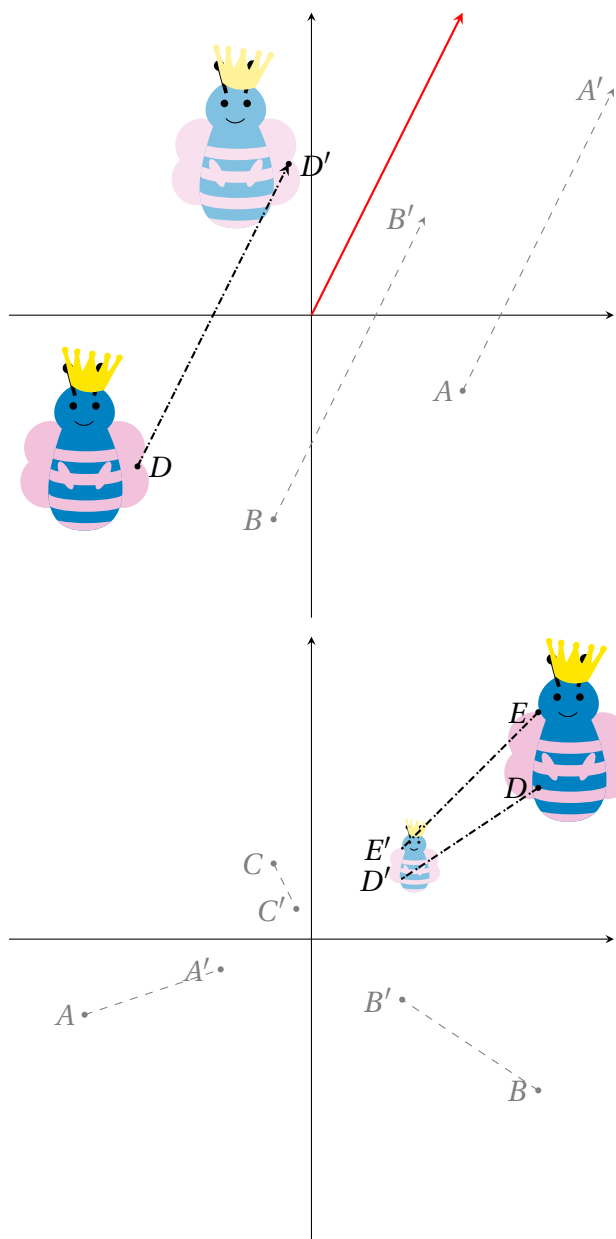
79

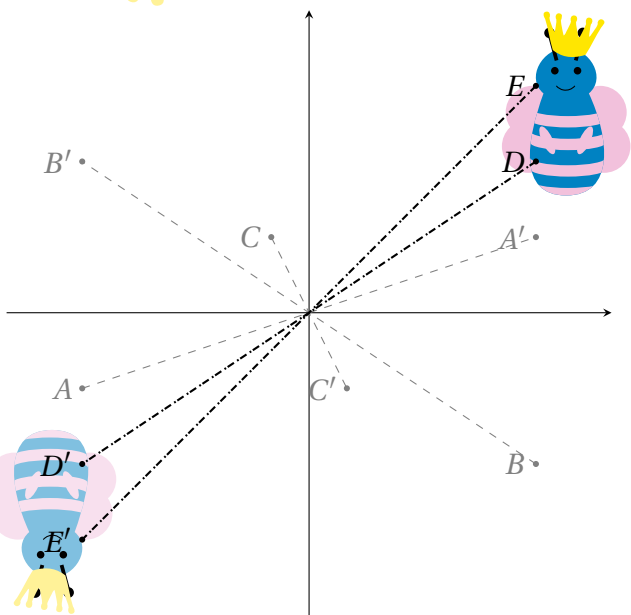
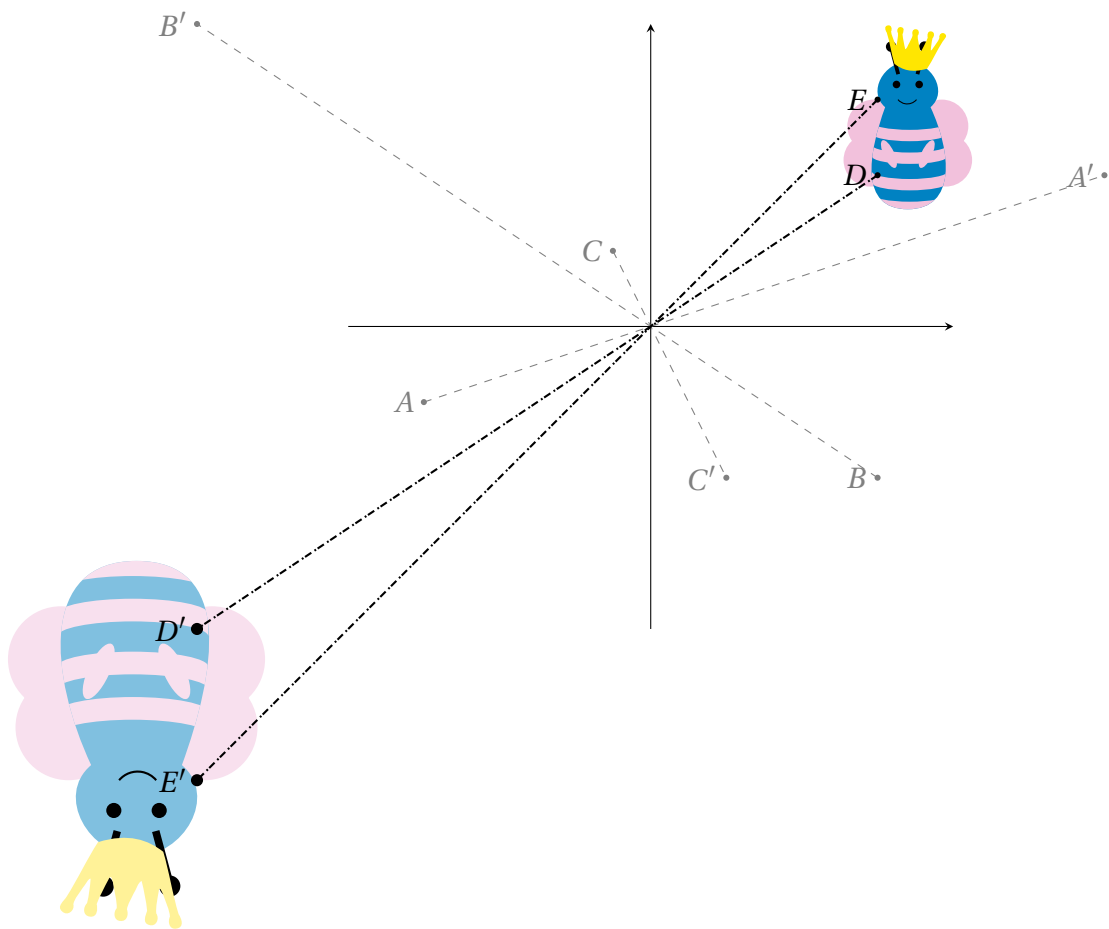
preuve

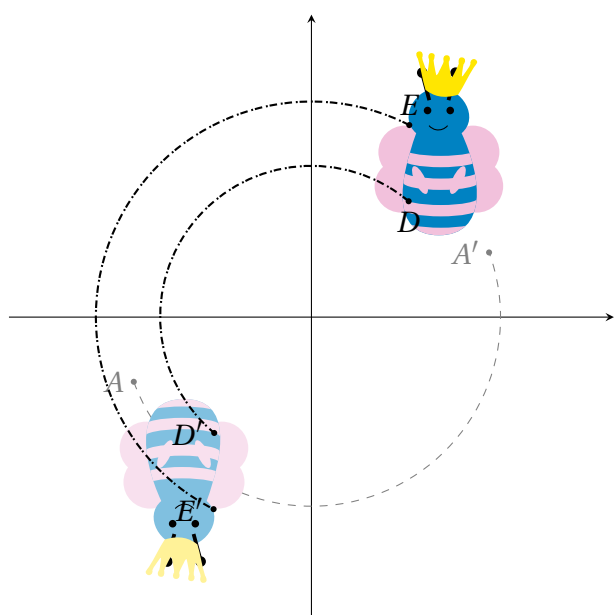
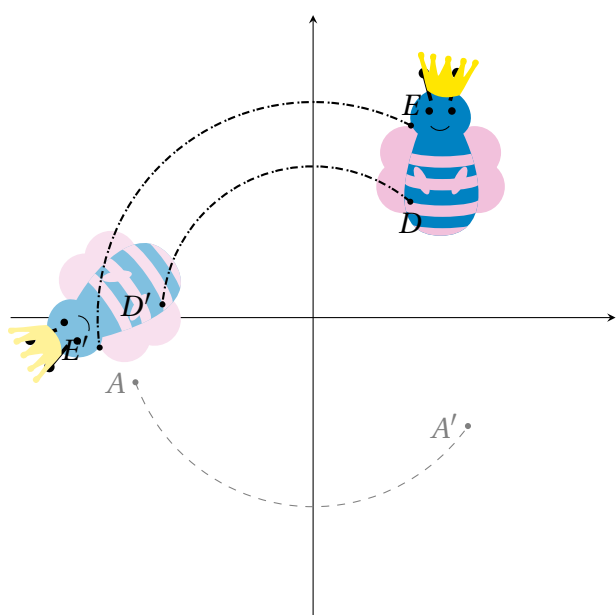
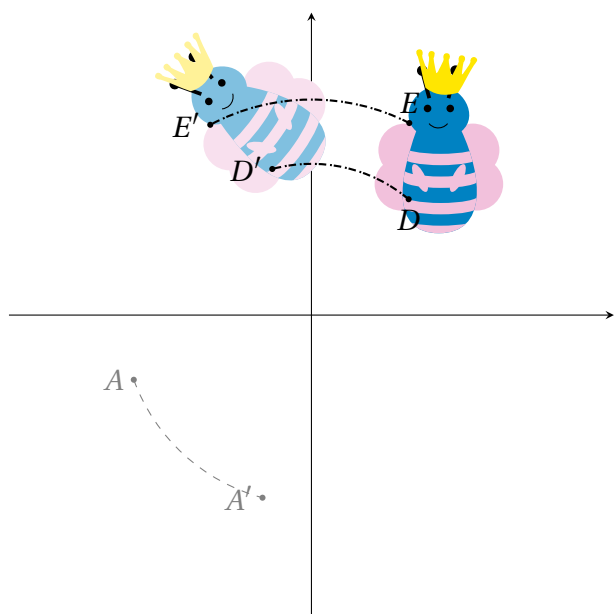
Proposition.

L'application $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie du plan par rapport à la droite $(O, \vec{i})$.









Nombres complexes

preuve et éléments de correction

7

On a

$$|z'|^2 = z' \overline{z'} = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1}{z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1}.$$

On en déduit :

$$|z'| = 1 \iff |z'|^2 = 1 \iff z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1 = z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1 \iff z = \overline{z}.$$

On a donc l'équivalence

$$|z'| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$$

9

Notons A, B, M les points d'affixe $i, -i, z$. On a :

$$|z'| = 1 \iff |z-i| = |z+i| \iff MA = MB$$

La dernière condition signifie que M appartient à la médiatrice de $[AB]$ qui est la droite $(O, \vec{i})$, axe des abscisses. D'où l'équivalence

$$|z'| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$$

10

Écrivons z sous forme algébrique $x+iy$ avec x et y réels.

On a $|z|^2 = x^2 + y^2$. Les deux premiers résultats sont alors évidents, et les deux derniers découlent des inégalités :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z| = |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \\ |\operatorname{Im} z| = |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \end{aligned}$$

Les cas d'égalité :

$$|\operatorname{Re} z| = |z| \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$$

11

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

On a alors $\overline{\overline{z}} = z$ et donc $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

On a

$$|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$$

12

Comme a, b, c sont de module 1, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}, \overline{c} = \frac{1}{c}$ et donc :

$$|ab+bc+ca| = \left| \overline{ab+bc+ca} \right| = |\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\overline{a}| = \left| \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right| = \left| \frac{a+b+c}{abc} \right|.$$

On en déduit :

$$|ab+bc+ca| = \frac{|a+b+c|}{|a||b||c|} = |a+b+c|.$$



13

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

— On a

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \times z_2 \overline{z_2} = (|z_1| |z_2|)^2.$$

Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1| |z_2|$ sont des réels positifs, on en déduit $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

— En supposant $z_2 \neq 0$, on a $z_1 = \frac{z_1}{z_2} z_2$ et donc $|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2|$.

On en déduit le résultat en divisant par $|z_2|$ qui est non nul.

14

Soit m et n les deux entiers considérés.

Par hypothèse, on peut trouver $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tels que $m = a^2 + b^2$ et $n = c^2 + d^2$. On a alors :

$$mn = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |a + ib|^2 |c + id|^2 = |(a + ib)(c + id)|^2$$

$$mn = |(ac - bd) + i(ad + bc)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Comme $ac - bd$ et $ad + bc$ sont des entiers, c'est gagné!

15

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.

Il s'agit de montrer une inégalité qui a lieu dans $\mathbb{R}^+$ (WHY?).

Examinons le carré de chacun des deux membres.

— On a, d'une part :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}), \end{aligned}$$

— et, d'autre part :

$$\begin{aligned} (|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| \end{aligned}$$

On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| &\iff (|z_1 + z_2|)^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}| \end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie, car on sait que l'on a $\operatorname{Re} z \leq |z|$ pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$. L'assertion initiale est donc vraie également et c'est exactement l'inégalité triangulaire.

Cas d'égalité D'après ce qui précède, on

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| &\iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) &= |z_1 \overline{z_2}| \\ &&\iff z_1 \overline{z_2} &\in \mathbb{R}^+ \\ &&\iff (z_1 = 0 \text{ et } z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^+) \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^+) \\ &&\iff z_1 = 0 \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } \frac{1}{|z_1|^2} \times \overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}^+) \\ &&\iff z_1 = 0 \text{ ou } (z_1 \neq 0 \text{ et } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+) \\ &&\iff z_1 = 0 \text{ ou } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$



17

En écrivant $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, le point donne :

$$|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{et donc} \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

En échangeant les rôles de z_1 et z_2 , on en déduit :

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

et donc la double inégalité :

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{ou encore} \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

21

Soit θ et φ deux réels. On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\varphi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta + \varphi)}. \end{aligned}$$

En particulier $e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = e^{i0} = 1$, ce qui prouve que

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{\overline{e^{i\varphi}}}{|e^{i\varphi}|} = \overline{e^{i\varphi}}$$

Enfin, la dernière relation est une conséquence immédiate des deux premières.

24

On a

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} ((e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3\cos \theta) \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= -\frac{1}{8i} ((e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) \\ &= \frac{1}{4} (-\sin(3\theta) + 3\sin \theta). \end{aligned}$$



En factorisant par l'angle moitié, on a $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

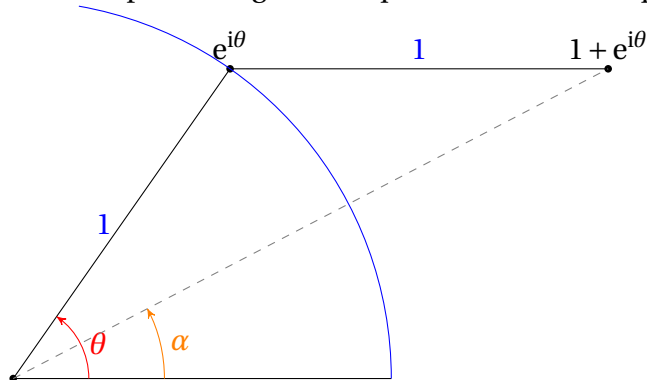
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En prenant le module, on obtient :

$$|1 + e^{i\theta}| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \begin{cases} 2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{si } \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi] \\ -2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

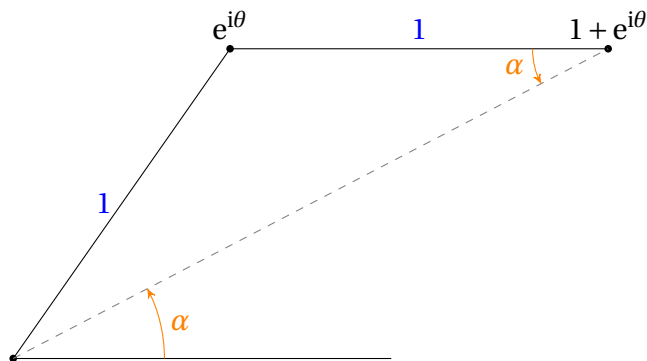
Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. En prenant le module, on obtient :

$$|1 + e^{i\theta}| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \begin{cases} 2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{si } \theta \in [0, \pi[\\ -2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\\ 0 & \text{si } \theta = \pi \end{cases}$$

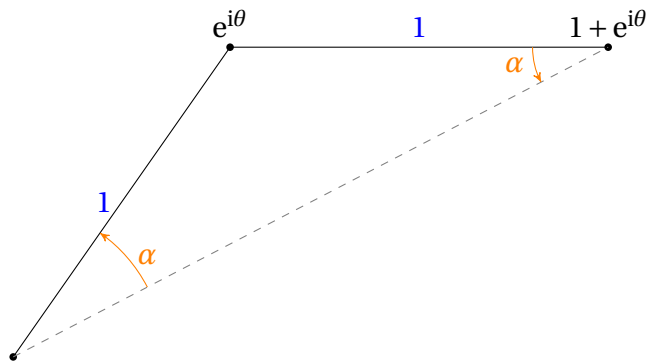
Voici l'explication géométrique — le lecteur adaptera le dessin lorsque θ est dans $] \pi, 2\pi[$ —



Sur le dessin, α est un argument de $1 + e^{i\theta}$. C'est également une mesure de l'angle en haut à droite de la figure (angles alternes-internes avec deux droites parallèles).



Par ailleurs, on voit un triangle isocèle de côté 1, donc on retrouve α à ses deux angles de base.



Ainsi, $\alpha + \alpha = \theta$. D'où $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

On démontre la relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$:

— pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence, en utilisant ...



— par passage à l'inverse, pour n entier négatif.

28

En utilisant la formule de Moivre on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \left(\exp \frac{i\pi}{3}\right)^{100} = \exp\left(\frac{100i\pi}{3}\right).$$

Comme $\frac{100\pi}{3} = \frac{(96+4)\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$, on a donc :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = -\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

29

En écrivant que $\sin(4\theta) = \text{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^4)$, on trouve

$$\sin(4\theta) = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta = 4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

S'arrêter là dans le calcul, sinon, on ne répondrait plus à la question!

32

En factorisant par l'angle moitié, on a :

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}) = e^{\frac{i\theta}{2}} 2\cos\frac{\theta}{2}$$

Bilan intermédiaire, on dispose des deux égalités (WHY?)

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z = -2\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})}$$

▷ Cas où $\theta \in [0, \pi[$.

Alors $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ (le premier quadrant), et ainsi $\cos\frac{\theta}{2} > 0$.

Ainsi, la forme trigonométrique de z est $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$, autrement dit :

$$|z| = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) \equiv \frac{\theta}{2} (2\pi)$$

▷ Cas où $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Alors $\frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ (le deuxième quadrant), et ainsi $\cos\frac{\theta}{2} < 0$.

Ainsi, la forme trigonométrique de z est $-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})}$, autrement dit :

$$|z| = -2\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) \equiv \pi + \frac{\theta}{2} (2\pi)$$

On peut résumer cela en :

$$z = \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \in [0, \pi[\\ -2\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})} & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$



35

On a l'équivalence $z_n \in \mathbb{R}^- \iff \arg(z_n) \equiv \pi [2\pi]$.

Or $z_n = (1 + i\sqrt{3})^n$ d'où :

$$\begin{aligned}\arg(z_n) &\equiv n \arg(1 + i\sqrt{3}) [2\pi] \\ &\equiv n \frac{\pi}{3} [2\pi]\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}z_n \in \mathbb{R}^- &\iff n \frac{\pi}{3} \equiv \pi [2\pi] \\ &\iff n \equiv 3 [6]\end{aligned}$$

36

Par identification de parties réelle et imaginaire de z , on a

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta$$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos x + b \sin x = r \cos \theta \cos x + r \sin \theta \sin x = r \cos(x - \theta).$$

Enjoy!

40

On a

$$e^{\bar{z}} = e^{\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} e^{-i \operatorname{Im} z} = \overline{e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}} = \overline{e^z}.$$

41

Écrivons a sous forme trigonométrique $a = r e^{i\theta}$.

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}e^z = a &\iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = r e^{i\theta} \\ &\iff \operatorname{Re} z = r \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z \equiv \theta [2\pi]\end{aligned}$$

Candidat $z = \ln r + i\theta$.

— On a les équivalences :

$$\begin{aligned}e^z = a &\iff e^z = e^{z_0} \\ &\iff e^{z - z_0} = 1 \\ &\iff e^{\operatorname{Re}(z - z_0)} e^{i \operatorname{Im}(z - z_0)} = 1 \\ &\iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z - z_0) = 0 \\ \operatorname{Im}(z - z_0) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\iff z - z_0 \in i2\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$



42

Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i &\iff e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff x = \ln(\sqrt{2}) \text{ et } y \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \right\}$.

45

La fonction polynomiale Q est de degré 2 et donc il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z-1)Q(z) = (z-1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c.$$

En identifiant les coefficients, cela équivaut à

$$\begin{cases} 1 &= a \\ -2 &= b-a \\ -5 &= c-b \\ 6 &= c \end{cases}$$

D'où $(a, b, c) = (1, -1, -6)$. La fonction polynomiale cherchée est $Q : z \mapsto z^2 - z - 6$.

47

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$.

On cherche les $Z \in \mathbb{C}$ tels que $Z^2 = z$.

Comme z est non nul, un complexe Z solution est nécessairement non nul.

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\varphi}$.

On a

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff \rho^2 e^{2i\varphi} = r e^{i\theta} \\ &\iff \rho^2 = r \text{ et } 2\varphi \equiv \theta [2\pi] \\ &\iff \rho = \sqrt{r} \text{ et } \varphi \equiv \frac{\theta}{2} [\pi] \\ &\iff Z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } Z = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Autre preuve. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$.

Soit $Z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} Z^2 = z &\iff Z^2 = \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &\iff (Z - \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}})(Z + \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}) = 0 \\ &\iff Z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } Z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

48

On a $1 - i\sqrt{3} = 2 \exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$.

On en déduit que les racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$ sont $\pm\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$, c'est-à-dire $\pm\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$.



1. **Analyse.** Supposons qu'il existe Z tel que $Z^2 = 1 + i$.

Écrivons Z sous forme algébrique $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbb{R}$.

Alors, en traduisant l'égalité des modules, des parties réelle, imaginaire, on obtient :

$$X^2 + Y^2 = \sqrt{2}$$

$$X^2 - Y^2 = 1$$

$$2XY = 1$$

Par somme et différence des lignes 1 et 2, on déduit $X^2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ et $Y^2 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$.

Comme $XY \geq 0$, les racines carrées de $1 + i$ sont :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}.$$

Synthèse. Les deux solutions trouvées sont nécessairement solutions, car on sait que l'équation $Z^2 = z$ admet exactement deux solutions (proposition 47). Comme on en a trouvé au plus deux, c'est qu'on les a toutes trouvées.

2. Par ailleurs, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc les racines carrées de $1 + i$ s'écrivent aussi $\pm 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Puisque $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, on a $Z_1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires de Z_1 , on a donc :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \stackrel{\text{WHY}}{=} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \stackrel{\text{WHY}}{=} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Transformons un peu le membre gauche de l'équation.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) && \text{où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta \text{ (qui existe!)} \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\delta}{2a}\right)\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\delta}{2a}\right)\right) \\ &= a\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}.$$

qui sont distinctes si $\Delta \neq 0$, et égales si $\Delta = 0$.



55

On calcule le discriminant : $\Delta = -24 + 10i$.

On cherche une racine de Δ sous forme algébrique $a + ib$. On doit avoir :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26, \quad a^2 - b^2 = -24, \quad \text{et} \quad 2ab = 10,$$

ce qui donne $a = \pm 1$, $b = \pm 5$ et $ab > 0$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{1}{12}(5 - i \pm (1 + 5i)) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i.$$

56

Cela résulte immédiatement des formules donnant les racines.

57

On a :

$$z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 3 z_1 z_2 = \sqrt{78}^2 - 3 \times 13 = 39$$

62

- Comme $\xi \neq 1$, on a $1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} = \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi}$, ce qui vaut 0 car $\xi^n = 1$.
- On peut $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Comme $n \geq 2$, on a $\xi \neq 1$. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité sont alors $1, \xi, \dots, \xi^{n-1}$ et, d'après le premier point, leur somme S est nulle.

63

Le produit des racines $n^{\text{ème}}$ de 1 est égal à :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}.$$

64

- Dans le cas où $z = 0$, le résultat est évident puisque le nombre complexe 0 a une seule racine $n^{\text{ème}}$ qui est 0, et que $\{\omega_0 \xi, \xi \in \mathbb{U}_n\} = \{0\}$.
- Supposons donc $z \neq 0$. Donc $\omega_0 \neq 0$.

Comme $\omega_0^n = z$, l'équation $\omega^n = z$ s'écrit aussi $\omega^n = \omega_0^n$ ou encore à $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n = 1$.

On en déduit on a $\omega^n = z$ si et seulement si

$$\exists \xi \in \mathbb{U}_n, \frac{\omega}{\omega_0} = \xi \quad \text{ou encore} \quad \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \omega = \xi \omega_0.$$



65

On remarque que -1 est une solution évidente. Les solutions sont donc les opposées des racines $(2n+1)^{\text{ème}}$ de l'unité. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ -e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}, k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \right\}$$

67

Comme $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, l'ensemble de ses racines cinquièmes est :

$$\left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5})}, k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}.$$

68

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2) &= (\vec{u}_1, \vec{t}) + (\vec{t}, \vec{u}_2) \\ &= -(\vec{t}, \vec{u}_1) + (\vec{t}, \vec{u}_2) \\ &\equiv -\arg z_1 + \arg z_2 [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

On a les équivalences

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \text{ sont colinéaires} &\iff (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

71

Notons F la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' . On a les équivalences

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\iff z' - z = b \\ &\iff z' = z + b \\ &\iff z' = f(z) \end{aligned}$$

en posant $f : z \mapsto z + b$.

73

Soit M un point d'affixe z . Soit M' un point d'affixe z' .

On a l'équivalence

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z - \omega) \\ &\iff z' = \lambda(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$



75

Soit M un point d'affixe z . Soit M' un point d'affixe z' .

— Cas $M \neq \Omega$.

On a l'équivalence

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff \Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi]. \\ &\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta [2\pi] \\ &\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \\ &\iff z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

— Cas $M = \Omega$.

On a bien l'équivalence

$$\underbrace{M' = F(M)}_{M' = \Omega} \iff \underbrace{z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega}_{z' = \omega}$$

76

$$\begin{aligned} \text{Il s'agit de } \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto i(z - 1 - i) + 1 + i = iz + 2 \end{aligned}$$

77

— Lorsque $a = 1$, F est représentée par $\text{Id}_{\mathbb{C}}$. C'est l'identité du plan.

— Supposons $a \neq 1$.

Vérifions que $F = H \circ R$ en montrant que $f = h \circ \rho$ où $f : z \mapsto az$ et $h : z \mapsto |a|z$ et $\rho : z \mapsto e^{i\alpha}z$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $h \circ \rho(z) = h(\rho(z)) = h(|a|z) = e^{i\alpha} \times (|a|z) = az$.

On montre de même l'égalité $F = R \circ H$.

79

Notons M et M' les points d'affixes respectives z et z' .

En notant F la symétrie par rapport à la droite $(0, \vec{i})$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} M' = F(M) &\iff (O, \vec{i}) \text{ est la médiatrice de } [MM'] \\ &\iff \text{le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (O, \vec{i}) \text{ et } \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{i} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \frac{z + z'}{2} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z - z'}{1} \in i\mathbb{R} \\ &\iff z + z' \in \mathbb{R} \text{ et } z - z' \in i\mathbb{R} \\ &\iff z' = \bar{z} \end{aligned}$$

Justifions la dernière équivalence, qui paraît naturelle, mais encore faut-il assurer le coup!

$$\begin{aligned} z + z' \in \mathbb{R} \text{ et } z - z' \in i\mathbb{R} &\iff \begin{cases} z + z' = \bar{z} + \bar{z}' \\ z - z' = -\bar{z} + \bar{z}' \end{cases} \\ &\iff z = \bar{z}' \text{ et } z' = \bar{z} \\ &\iff z' = \bar{z} \end{aligned}$$

