Nombres complexes

exercices

Nombres complexes

Conjugué, Module . . .

101 **Tangente de l'angle moitié** — seul

Soit z un nombre complexe qui n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$.
Notons θ un argument de z. Montrer que

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}.$$

102 **Calculs dans $\mathbb{U}$** — seul

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. On note θ_1 et θ_2 des arguments des complexes z_1 et z_2.
   Exprimer Z en fonction de θ_1 et θ_2.

103 **Cas d'égalité** — vendredi 23

Soit z_1, z_2, z_3 trois complexes *non nuls*. Montrer l'équivalence

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3| \iff \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \frac{z_3}{z_1} \in \mathbb{R}^+$$

Formule de Moivre, Formule d'Euler

104 **Linéarisation** — seul

Linéariser $\sin^4 x$.

On doit trouver $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Exprimer $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 5$.

Exponentielle complexe

105 **Et si on multipliait par e^z ?!** — vendredi 23

Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 2i$.

Résolution d'équations

106 **Sans effort**

Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $z^2 - (1 + a + a^2)z + a + a^3 = 0$.

107 **Un système somme-produit**

Chercher tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$.

Combien y a-t-il de solutions ?

108 **Vous avez dit « somme-produit » ?**

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq 0$.
On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation $z^2 + pz + q = 0$.
Justifier que z_1 et z_2 sont non nuls, puis déterminer une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{1+z_1}{z_2}$ et $\frac{1+z_2}{z_1}$.

109 **Une équation du 3ème degré**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (1-i)\,z^2 - z + 1 - 3i = 0$, après avoir démontré qu'elle possède une solution imaginaire pure.

110 **Une équation à paramètre de degré 2**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

111 **Une équation à paramètre de degré 4**

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre l'équation $z^4 - 2\sin\theta\, z^2 + \tan^2\theta = 0$.
Combien a-t-elle de solutions distinctes ?

Racines $n^{\text{ème}}$

112 **Racine 7ème de l'unité**

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Montrer que $\overline{S} = T$ et $\operatorname{Im} S > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T.

113 **Une CNS d'inclusion des $\mathbb{U}_n$**

Soit m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$ si et seulement si n divise m.

114 **Équations plus difficiles**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$
2. $(z+1)^n = (1-z)^n$

Un peu de géométrie

115 **Triangle équilatéral**

Montrer que les points distincts A, B et C, d'affixes a, b et c, forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

116 **Cercle et orthogonalité**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = \dfrac{a+b}{2}$ et $R = \dfrac{|b-a|}{2}$.

1. Montrer l'équivalence
$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}, \quad \frac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff |z-\omega|^2 = R^2$$
2. On suppose $a \neq b$ et on note A et B les points d'affixes a et b.
On note Ω le point d'affixe ω.
Pour un point M du plan, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

117 **Puissance 1, 2, 3**

Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ pour que les points d'affixes z, z^2, z^3 :

1. soient alignés ;
2. forment un triangle rectangle ;
3. forment un triangle rectangle et isocèle.

118 **Orthocentre**

Soit A, B, C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours des hauteurs.

Miscellaneous

119 π, où es-tu ?

Pour tout $n \geqslant 3$, on pose

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(k+1)\pi}{n}} \right|$$

1. Donner une interprétation géométrique de W_n et en déduire une conjecture pour la limite de la suite $(W_n)_{n\geqslant 3}$.
2. Calculer W_3.
3. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $W_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 3}$ admet une limite et la déterminer.

120 Équation du 3ème degré

1. Rappeler la définition du nombre complexe j.
   Donner un polynôme de degré 2 admettant j pour racine.
   Donner également un polynôme de degré 3 à coefficients réels admettant j pour racine.

Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
On considère l'équation d'inconnue complexe z

$$(E_1) : z^3 + pz + q = 0$$

et l'équation d'inconnue complexe Z

$$(E_2) : Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

On note U et V les solutions de l'équation (E_2).

On note u une racine cubique de U, c'est-à-dire un nombre **complexe** tel que $u^3 = U$.

2. Exprimer $U + V$ et UV en fonction de p et q.
3. Montrer que $u \neq 0$.

Dans la suite, on pose $v = \dfrac{-p}{3u}$.

4. Montrer que $v^3 = V$ puis que $u^3 + v^3 = -q$.
5. Montrer que $u + v$ est solution de l'équation (E_1).
6. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi des solutions de l'équation (E_1).
7. Dans cette question, on suppose que u et v sont **réels distincts**.
   Montrer que $ju + j^2v \notin \mathbb{R}$. En déduire que $j^2u + jv \notin \mathbb{R}$, puis que $ju + j^2v \neq j^2u + jv$.
8. Montrer que si $4p^3 + 27q^2 > 0$, l'équation (E_1) admet une racine réelle et une seule.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel A, il existe un unique réel a tel que $a^3 = A$.
9. Montrer que l'équation $z^3 - z - 1 = 0$ admet une unique solution réelle que l'on déterminera à l'aide de radicaux (racine carrée, racine cubique etc.).

121 L'ensemble $\mathbb{Z}[\mathrm{j}]$

1. Soit (E) l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Donner les solutions de (E) sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

Dans la suite du problème, on pose $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   On écrit z sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{j}y$.

(b) Exprimer $|z|^2$ en fonction de x et de y.

Dans la suite, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\mathcal{A} \;=\; \left\{x + \mathrm{j}y,\, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{A} \;=\; \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, (x,y) \in \mathbb{Z}^2, z = x + \mathrm{j}y\right\}$$

3. (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par somme, c'est-à-dire que la somme de deux éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit, c'est-à-dire que le produit de deux éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable pour la conjugaison, c'est-à-dire que si $z \in \mathcal{A}$, alors $\overline{z}$ (le conjugué de z) est dans $\mathcal{A}$.
4. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble suivant

$$\mathcal{U} \;=\; \{z \in \mathcal{A} \mid \exists z' \in \mathcal{A}, zz' = 1\}$$

   Autrement dit, $\mathcal{U}$ est l'ensemble des complexes z de l'ensemble $\mathcal{A}$ tels qu'il existe z' dans $\mathcal{A}$ vérifiant $zz' = 1$.

   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (b) Soit $z \in \mathcal{A}$. Montrer l'équivalence suivante

$$z \in \mathcal{U} \iff |z|^2 = 1$$

   (c) Montrer que $\mathcal{U}$ contient exactement six éléments que l'on écrira en fonction de j.
   Indication, on pourra remarquer que $|z|^2$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés.

Nombres complexes

corrigés

101

Le complexe z n'est pas nul, donc il possède un argument θ.
On remarque que $\operatorname{Re} z + |z| \neq 0$; en effet, sinon on aurait $\operatorname{Re} z = -|z|$, d'où $(\operatorname{Re} z)^2 = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, et on aurait donc $\operatorname{Im} z = 0$ et alors $z = \operatorname{Re} z = -|z| \in \mathbb{R}_-$.
Ainsi $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$ est défini et l'on a :

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} = \frac{|z| \sin\theta}{|z| \cos\theta + |z|} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}}{2 \cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

1. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}} && \text{règles de calcul des conjugués}\\
&= \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} && \text{car } |z_1|=|z_2|=1\\
&= Z && \text{en réduisant aux mêmes dénominateurs.}
\end{aligned}$$

   Comme $Z=\overline{Z}$, on en déduit que Z est réel.

2. On a $z_1=e^{i\theta_1}$ et $z_2=e^{i\theta_2}$ avec $\theta_1+\theta_2\neq\pi\ [2\pi]$ car $z_1z_2\neq -1$. Donc :

$$Z = \frac{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}{1+e^{i(\theta_1+\theta_2)}} = \frac{e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}}{e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}}\,\frac{e^{i\,(\theta_1-\theta_2)/2}+e^{i\,(-\theta_1+\theta_2)/2}}{e^{-i\,(\theta_1+\theta_2)/2}+e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

— Supposons cette égalité réalisée. On a, par inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

Comme les termes extrêmes sont égaux, on a en fait deux égalités.
On a donc :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + z_2| + |z_3| \text{ et } |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

On utilise alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour deux nombres complexes.

- Par hypothèse, z_1 et z_2 sont non nuls, donc l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1 + |z_2|$ implique l'existence de $u \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = u\, z_1$.
- On a alors $z_1 + z_2 = (1 + u)z_1 \neq 0$, donc l'égalité $|(z_1 + z_2) + z_3| = |z_1 + z_2| + |z_3|$ implique l'existence de $u' \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_3 = u'(z_1 + z_2) = u'(1 + u)z_1$.
  En posant $v = u'(1 + u)$, on a $v \in \mathbb{R}_+$ et $z_3 = vz_1$.

— Réciproquement, s'il existe u et v dans $\mathbb{R}_+$ tels que $z_2 = u\, z_1$ et $z_3 = v\, z_1$, on a :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |(1 + u + v)z_1| = (1 + u + v)|z_1| = |z_1| + u\,|z_1| + v\,|z_1| = |z_1| + |z_2| + |z_3|,$$

car u et v sont des réels positifs, donc sont égaux à leur module.

104

Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

D'où

$$\cos^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{i5\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{i5\theta}\right).$$

En regroupant les termes symétriques, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^5\theta &= \frac{1}{32}\left(\left(e^{i5\theta}+e^{-i5\theta}\right) + 5\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right) + 10\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)\\ &= \frac{1}{16}\big(\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos\theta\big).\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\sin^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 &= \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{i5\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{i5\theta}\right)\\ &= \frac{1}{32i}\left(\left(e^{i5\theta}-e^{-i5\theta}\right) - 5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right) + 10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)\\ &= \frac{1}{16}\big(\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin\theta\big).\end{aligned}$$

106

Cette équation de degré 2 a nécessairement deux solutions (éventuellement confondues) dans $\mathbb{C}$.
Leur somme vaut $1 + a + a^2$ et leur produit vaut $a + a^3 = a(1 + a^2)$.
Les solutions sont « donc » sont a et $1 + a^2$.

107

D'après le cours, on a l'équivalence

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3\\ xy & = & 2\end{array}\right. \iff x,\ y \text{ solutions de } t^2-3t+2=0$$

Or l'équation $t^2-3t+2=0$ a deux solutions 1 et 2. Donc les couples solutions sont $(1,2)$ et $(2,1)$. Il y a donc deux solutions !

108

Le produit des solutions de l'équation $z^2+pz+q=0$ vaut q. Ainsi $z_1z_2=q$. Or $q\neq 0$, donc les complexes z_1 et z_2 sont non nuls.
On pose

$$Z_1=\frac{1+z_1}{z_2} \text{ et } Z_2=\frac{1+z_2}{z_1}\cdot$$

On a :

$$Z_1+Z_2=\frac{1+z_1}{z_2}+\frac{1+z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2+z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+z_1+z_2}{z_1z_2}\cdot$$

Comme $z_1+z_2=-p$ et $z_1z_2=q$, on obtient :

$$Z_1+Z_2=\frac{p^2-2q-p}{q}\cdot$$

On obtient, de même :

$$Z_1Z_2=\frac{1+z_1+z_2+z_1z_2}{z_1z_2}=\frac{1-p+q}{q}\cdot$$

D'après le cours, Z_1 et Z_2 sont les solutions de l'équation :

$$Z^2-\frac{p^2-2q-p}{q}Z+\frac{1-p+q}{q}=0.$$

— Si $a \in \mathbb{R}$, alors $a\,i$ est solution de l'équation si et seulement si

$$-a^3\,i - (1-i)\,a^2 - a\,i + 1 - 3i = -a^2 + 1 + i\,(-a^3 + a^2 - a - 3) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -a^2 + 1 &= 0 \\ -a^3 + a^2 - a - 3 &= 0. \end{cases}$$

La première équation donne $a = \pm 1$ et seul -1 convient pour la seconde équation. Ainsi $-i$ est solution de l'équation.

— Il existe $(b, c) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 + (1-i)\,z^2 - z + 1 - 3i = (z+i)(z^2 + b\,z + c).$$

On a $(z+i)(z^2 + b\,z + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (c + i\,b)z + i\,c$. Il suffit donc que b et c vérifient $b + i = 1 - i$, $c + i\,b = -1$ et $i\,c = 1 - 3i$, c'est-à-dire $b = 1 - 2i$ et $c = -3 - i$.
Ainsi z est solution de l'équation si et seulement si $z = -i$ ou $z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$.
On résout l'équation du second degré. On trouve $\Delta = 9$, donc $z = \frac{-1+2i\pm 3}{2}$.
L'ensemble des solutions de l'équation de degré 3 est $\{-i, -2+i, 1+i\}$.

110

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = -4\sin^2\theta = (2\mathrm{i}\sin\theta)^2$.
Les solutions sont donc égales à

$$\frac{-(-2\cos\theta) \pm 2\mathrm{i}\sin\theta}{2} \;=\; \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta \;=\; \mathrm{e}^{\pm i\theta}$$

Plus précisément :

— Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta = 0$ et l'équation admet une solution double z_0 qui vaut $\begin{cases} z_0 = 1 & \text{si } \theta \equiv 0\ [2\pi] \\ z_0 = -1 & \text{si } \theta \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases}$

— Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta \neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Bilan. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\begin{array}{ll} \{1\} & \text{si } \theta \equiv 0\ [2\pi] \\ \{-1\} & \text{si } \theta \equiv \pi\ [2\pi] \\ \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right\} & \text{si } \theta \not\equiv 0\ [\pi] \end{array}$$

111

On note $\mathcal{E}$ l'équation donnée.
On pose $Z = z^2$ et on résout $Z^2 - 2\sin\theta Z + \tan^2\theta = 0$.
Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = 4(\sin^2\theta - \tan^2\theta) = -\frac{4\sin^4\theta}{\cos^2\theta} = \left(2\mathrm{i}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2.$$

Ses solutions sont donc

$$\frac{1}{2}\left(-(-2\sin\theta) \pm 2\mathrm{i}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sin\theta \pm \mathrm{i}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \;=\; \tan\theta(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta) \;=\; \tan\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$$

Notons Z_1 et Z_2 les deux solutions, qui sont distinctes si et seulement si $\theta \neq 0$:

$$Z_1 = \tan\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \tan\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

— Si $\theta = 0$, alors $Z_1 = Z_2$.
Plus précisément, $Z_1 = Z_2 = 0$.
Donc l'équation $\mathcal{E}$ a une seule solution 0.

— Si $\theta \neq 0$, alors $Z_1 \neq Z_2$.
Plus précisément, Z_1, Z_2 sont non nuls. Donc l'équation $\mathcal{E}$ possède 4 solutions.

— si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\tan\theta > 0$. Donc les formes trigonométriques de Z_1 et Z_2 sont

$$Z_1 = \tan\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \tan\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Les solutions de $\mathcal{E}$ sont les racines carrées de Z_1 et Z_2, à savoir :

$$\sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \quad -\sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \quad \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \quad -\sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

— si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, alors $\tan\theta < 0$.
Donc les formes trigonométriques de Z_1 et Z_2 sont

$$Z_1 = (-\tan\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = (-\tan\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+\pi)}.$$

Les solutions de $\mathcal{E}$ sont les racines carrées de Z_1 et Z_2, à savoir :

$$\sqrt{-\tan\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\pi}{2}}, \quad -\sqrt{-\tan\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\pi}{2}}, \quad \sqrt{-\tan\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta+\pi}{2}}, \quad -\sqrt{-\tan\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta+\pi}{2}}.$$

1. On a :

$$\overline{S} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4 = e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{8\pi}{7}} = e^{i\frac{12\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} = z^6 + z^5 + z^3 = T$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} S &= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} \\ &= \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{3\pi}{7} > 0,\end{aligned}$$

car la fonction sin est croissante et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. On a, puisque $z \neq 1$:

$$S + T = \sum_{k=0}^{6} z^k - 1 = \frac{1 - z^7}{1 - z} - 1 = -1,$$

car $z^7 = e^{i\,2\pi} = 1$.
On a, en utilisant le fait que $z^7 = 1$:

$$\begin{aligned}ST &= z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10} \\ &= z^4 + z^6 + 1 + z^5 + 1 + z + 1 + z^2 + z^3 \\ &= S + T + 3 = 2.\end{aligned}$$

Ainsi S et T sont les solutions de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$.
Le discriminant est -7 et les racines $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Comme $\operatorname{Im} S > 0$, on a :

$$S = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad T = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

— Supposons $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$. Alors, en particulier $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{U}_m$, donc $\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^m = e^{\frac{2mi\pi}{n}} = 1$. On en déduit que $\frac{2m\pi}{n}$ est un multiple de 2π donc n divise m.

— Supposons que n divise m. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = np$.
Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $z^n = 1$. On en déduit $z^m = (z^n)^p = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_m$.
On a donc $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.

115

Le triangle équilatéral ABC est dit direct (resp. indirect) si l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ (resp. $-\frac{\pi}{3}$).
Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si, il est équilatéral direct ou équilatéral indirect.

— Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ce qui s'écrit :

$$(c-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\,(b-a) = -\mathrm{j}^2\,(b-a)$$

D'où $c = a - \mathrm{j}^2(b-a)$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2 + c & = & a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2 + \big(a - \mathrm{j}^2(b-a)\big) \\ & = & a(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2) \\ & = & 0 \end{array}$$

— De même ABC est équilatéral indirect si et seulement si

$$(c-a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\,(b-a) = -\mathrm{j}\,(b-a)$$

De la même façon, on trouve $a\,j^2 + b\,j + c = 0$.

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2 + c = 0 \qquad \text{ou} \qquad a\mathrm{j}^2 + b\mathrm{j} + c = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\big(a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2 + c\big)\,\big(a\mathrm{j}^2 + b\mathrm{j} + c\big) = 0.$$

Après simplification, en utilisant $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ et $\mathrm{j}^3 = 1$, on obtient la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 - (b\,c + a\,c + a\,b) = 0$$

116

1. Soit $z \neq a$.
   D'une part, on a

$$\begin{aligned}\frac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff \frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{z}-\overline{a}} = -\frac{z-b}{z-a} \\ &\iff (\overline{z}-\overline{b})(z-a) = -(\overline{z}-\overline{a})(z-b) \\ &\iff 2z\overline{z} - z(\overline{a}+\overline{b}) - \overline{z}(a+b) + (\overline{a}\,b - a\,\overline{b}) = 0 \\ &\iff z\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + \frac{1}{2}(\overline{a}\,b - a\,\overline{b}) = 0.\end{aligned}$$

   D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}|z-\omega|^2 = R^2 &\iff (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) - \frac{|b-a|^2}{4} = 0 \\ &\iff z\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + \omega\overline{\omega} - \frac{|b-a|^2}{4} = 0\end{aligned}$$

   Reste à montrer que $\omega\,\overline{\omega} - \frac{|b-a|^2}{4} = \frac{1}{2}(\overline{a}\,b - a\,\overline{b})$. On a

$$\omega\,\overline{\omega} - \frac{|b-a|^2}{4} = \frac{1}{4}(a+b)(\overline{a}+\overline{b}) - \frac{1}{4}(b-a)(\overline{b}-\overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a}\,b - a\,\overline{b}).$$

2. Soit $M \neq A$. On a l'équivalence :

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \iff \frac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff |z-\omega|^2 = R^2 \iff M\Omega^2 = R^2$$

   La dernière égalité est équivalente au fait que M appartient au cercle de centre Ω et de rayon R, ou encore au cercle de diamètre $[AB]$.

117

On note M_1, M_2, M_3 les points d'affixes z, z^2, z^3.

1. Si $z = 1$ ou $z = 0$, les points sont confondus donc alignés ; sinon, ils sont alignés si et seulement si $\frac{z^3-z}{z^2-z} = z+1$ est réel, ce qui équivaut à z réel. Comme 0 et 1 sont réels, on conclut que les trois points sont alignés si et seulement si z est réel.
2. On suppose que les points sont distincts, c'est-à-dire que $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

   — Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1 si et seulement si $\frac{z^3-z}{z^2-z} = z+1$ est imaginaire pur. Cela équivaut à $\mathrm{Re}(z) = -1$, donc au fait que M_1 appartient à la droite d_1 d'équation $x = -1$.

   — De même, $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_2 si et seulement si $\frac{z^3-z^2}{z-z^2} = -z$ est imaginaire pur. Cela équivaut à $\mathrm{Re}(z) = 0$, donc au fait que M_1 appartient à la droite d_2 d'équation $x = 0$.

   — De même, $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_3 si et seulement si $\frac{z-z^3}{z^2-z^3} = 1+\frac{1}{z}$ est imaginaire pur.
   En notant $z = x + i\,y$, avec x et y réels, on a les équivalences :

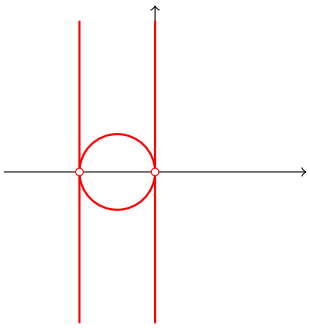
$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{z} \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff 1+\frac{1}{\overline{z}} = -1-\frac{1}{z} \\ &\iff 2z\overline{z} = -(z+\overline{z}) \\ &\iff x^2+y^2 = -x \\ &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   On reconnaît l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, d'affixe $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ (ce cercle est tangent aux droites d_1 et d_2).
   La condition équivaut donc au fait que M_1 appartient au cercle $\mathcal{C}$.

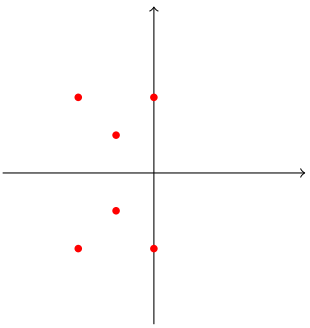
   Finalement le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle si et seulement si M_1 appartient à

$$d_1 \cup d_2 \cup \mathcal{C} \ \setminus \ \{O, A\}$$

   où A est le point d'affixe -1.



3. En plus d'être imaginaire pur, il faut que dans chacun des cas précédents, le rapport soit de module 1.
   Ce qui donne, dans le premier cas $z+1 = \pm i$, dans le second cas $z = \pm i$ et dans le troisième cas $1+\frac{1}{z} = \pm i$.
   Finalement le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle et isocèle si et seulement si z appartient à :



$$\left\{-1-i,\ -1+i,\ -i,\ i,\ \frac{1}{2}(-1-i),\ \frac{1}{2}(-1+i)\right\}.$$

118

Il s'agit de démontrer que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, les deux autres relations d'orthogonalité obtenues par permutations circulaires s'en déduisant par symétrie. On a :

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \iff \frac{h-a}{c-b} \in i\,\mathbb{R} \iff \frac{c+b}{c-b} \in i\,\mathbb{R}.$$

On a, puisque b et c appartiennent à $\mathbb{U}$:

$$\overline{\left(\frac{c+b}{c-b}\right)} = \frac{\overline{c}+\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = \frac{b+c}{b-c} = -\frac{c+b}{c-b}.$$

Ainsi $\frac{h-a}{c-b} \in i\,\mathbb{R}$ et donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

1. W_n est le périmètre du polygone dont les sommets sont les points d'affixes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ce polygone est inscrit dans le cercle trigonométrique.
   Quand n tend vers l'infini, ce polygone se rapproche du cercle.
   Ainsi, on conjecture que la suite (W_n) converge et a pour limite 2π.
2. $W_3 = |1-j| + |j-j^2| + |j^2-1|$ est exactement le périmètre du triangle (équilatéral) dont les sommets sont les points d'affixes $1, j, j^2$.
   Sur un dessin, il est facile de voir que $|j-j^2| = \sqrt{3}$.
   Donc $W_3 = 3\sqrt{3}$.
3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a (en factorisant) :
$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)\right| = \left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right|$$
   d'où
$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right| = = n\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right| \overset{\text{WHY}}{=} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
4. Par un jeu d'écriture, on obtient
$$W_n = 2\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$
   On a
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{n} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où, par composition de limites,} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1$$
   D'où
$$\lim_{n\to+\infty} W_n = 2\pi$$

1. $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Les polynômes X^2+X+1 et X^3-1 admettent j pour racine.
2. Comme U et V sont les solutions de (E_2), on a $(Z-U)(Z-V) = Z^2+qZ-\dfrac{p^3}{27}$. D'où $U+V \overset{\clubsuit}{=} -q$ et $UV \overset{\spadesuit}{=} -\dfrac{p^3}{27}$.
3. Raisonnons par l'absurde. Si $u=0$ alors $u^3=0$ donc $U=0$, donc $p=0$ (d'après ♠), ce qui n'est pas d'après l'énoncé.
   Ainsi, $u \neq 0$.
4. Le complexe v vérifie par définition l'égalité $3uv=-p$. En élevant au cube, on obtient $27u^3v^3 = -p^3$, d'où (d'après ♠) $u^3v^3 = UV$. Or $u^3 = U \neq 0$, donc $v^3 = V$.
5. Remarquons que $u^3+v^3 = -q$ (d'après ♣) et rappelons que $3uv=-p$ (cf. la définition de v). Ainsi :
$$(u+v)^3+p(u+v)+q \;=\; u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q \;=\; \underbrace{(u^3+v^3)}_{-q} + \underbrace{3uv}_{-p}(u+v)+p(u+v)+q \;=\; 0$$
6. Montrer que $ju+j^2v$ et j^2u+jv sont aussi des solutions de l'équation (E_1).
   1ère solution (par le calcul) Avant de commencer, notons que $ju+j^2v = j(u+jv)$ et que $j^3=1$. Ainsi, il suffit de reprendre le caclul précédent et de remplacer v par jv.
$$\big(j(u+jv)\big)^3 + pj(u+jv)+q \;=\; \underbrace{(u^3+v^3)}_{-q} + \underbrace{3ujv}_{-pj}(u+jv)+pj(u+jv)+q \;=\; 0$$
   On montrer de même que j^2u+jv est solution.
   2ème solution (moins calculatoire et plus conceptuelle ?)
   Nous venons de montrer que
$$\text{si } (u,v) \text{ vérifie } \begin{cases} u^3 = U \\ v = \dfrac{-p}{3u} \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad u+v \text{ est solution de } (E_1)$$
   Fixons donc un tel couple (u,v) (qui existe d'après les questions précédentes).
   Alors le couple (ju, j^2v) vérifie les 2 égalités de l'accolade ci-dessus. En effet, on a :
$$\begin{cases} (ju)^3 = U & (\text{car } j^3=1 \text{ et } u^3=U) \\ j^2v = \dfrac{-p}{3(ju)} & (\text{car } 1/j = j^2 \text{ et } v = \frac{-p}{3u}) \end{cases}$$
   Donc, d'après l'implication ci-dessus, $(ju)+(j^2v)$ est solution de (E_1).
7. On a $ju+j^2v = ju+(-1-j)v = -v+j(u-v)$. On écrit $j = \frac{-1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi $\mathrm{Im}(ju+j^2v) = \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \neq 0$ car $u \neq v$. Donc $ju+j^2v \notin \mathbb{R}$.
   Comme $\overline{ju+j^2v} = j^2u+jv$, on obtient que $j^2u+jv \notin \mathbb{R}$ et que $ju+j^2v \neq j^2u+jv$
8. Supposons $4p^3+27q^2 > 0$.
   Alors l'équation (E_2) admet deux solutions **réelles distinctes** U et V.
   Il existe alors une unique racine cubique **réelle** u de U, c'est-à-dire telle que $u^3=U$.
   Choisissons également l'unique réel v tel que $v^3=V$.
   On sait alors que $z_0 = u+v$, $z_1 = ju+j^2v$ et $z_2 = j^2u+jv$ sont des solutions de (E_1).
   Comme $U \neq V$, on a $u \neq v$, donc (d'après la question précédente) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ et $z_1 \neq z_2$.
   Ainsi z_0, z_1, z_2 sont exactement les solutions de (E_1) (car l'équation est de degré 3) et seule z_0 est réelle.
   Par conséquent (E_1) admet bien une seule racine réelle.
9. Montrer que l'équation $z^3-z-1=0$ admet une unique solution réelle que l'on déterminera à l'aide de radicaux (racine carrée, racine cubique etc.).
   Ici $p=-1$ et $q=-1$. Comme $4p^3-27q^2 > 0$, l'équation admet une unique solution réelle (à savoir $u+v$, où $u = \sqrt[3]{U}$ et $v = \sqrt[3]{V}$ avec U et V les deux solutions réelles disctinctes de (E_2).
   Les solutions de (E_2) sont $U, V = \dfrac{1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}}}{2}$.
   Donc l'unique solution réelle de (E_1) est $\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{\frac{23}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{\frac{23}{27}}}{2}}$