Programme de colle n° 19

semaine du 25 mars 2024

Le thème principal de la colle est « primitives et calcul d'intégrales » et « un peu d'analyse asymptotique » .
Nous avons fait peu d'exercices abstraits d'analyse asymptotique (notamment un seul exemple de suite implicite).

Chers colleurs Je vous demande de rester modestes concernant le niveau des calculs de primitives et intégrales (confer le cours le cours, sur ce lien cliquable).
Par ailleurs, nous n'avons pas encore fait le chapitre d'intégration. Donc pas de croissance de l'intégrale, ni de positivité de l'intégrale etc...

Pour être plus précis, voir le programme officiel dans les pages suivantes.

Analyse asymptotique (le début)

Les calculs faits en classe Le « montrer que ... admet un DL » pourra être justifié « par opérations ».

- Montrer que $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.
- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\frac{\sin(2x)-\mathrm{sh}(2x)}{(2x-\sin x-\tan x)^2}$.
- Déterminer la limite en 0 de $\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x}$.
- Déterminons un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n(n+1)}{1+n^2}$$

- Donner, au voisinage de $+\infty$, le développement asymptotique à trois termes (ici à la précision $\frac{1}{x}$) de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Qu'en déduit-on concernant $\mathscr{C}_f$?

Un peu de dénombrement

Soit E un ensemble fini.

- En posant $n = \mathrm{card}\, E$, le nombre de p-arrangements de E est ....
- En notant $n = \mathrm{card}\, E$, le nombre de p-combinaisons de E est ... La preuve repose sur l'égalité « Nb de p-arr. $=$ $p! \times$ Nb. de p-comb. ».
- Le nombre de p-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ est ...
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
  - Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
  - Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal ...
- Relation de Pascal
- Savoir écrire le développement du produit $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ pour $n = 4$, puis pour n quelconque :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} \quad \text{ou encore} \quad \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \prod_{i\in I} x_i$$

Mieux $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{\mathrm{card}\, I} \prod_{i\in I} x_i$ (l'élève vérifiera que le terme pour $I = \emptyset$ fournit bien 1).

Primitives

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.