Fonctions usuelles

exercices

07exo-Fonctions_usuelles.pdf, 8 novembre 2023, 22:37

Faire ses gammes

101 Dérivons

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{a}{x^2}}$

(ii) $x \mapsto x - a\sqrt{x}$

(iii) $x \mapsto \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

(iv) $x \mapsto \sqrt{1+\cos^2 x}$

(v) $x \mapsto (ax+b)^x$

(vi) $x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin(x)}$

(vii) $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$

(viii) $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x^2-1)$

(ix) $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

(x) $x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$

102 Des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(i) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$

(ii) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

(iii) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

(iv) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$

103 Étude de fonctions

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

(i) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$

(ii) $x \longmapsto \ln(x-1)+\ln(x+1)$

(iii) $x \longmapsto \ln(x^2-1)$

(iv) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

(v) $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$

(vi) $x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$

(vii) $x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$

Fonctions exponentielles et puissances

104 Écriture d'un entier en base 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i \quad \text{avec} \quad a_{p-1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![0, p-2]\!],\ a_i \in \{0,1\}.$$

Montrer que $p = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

105 Des suites

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n,p) non nuls tels que $n^p = p^n$.
2. Déterminer les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n \geqslant n^2$.

106 Max !

Déterminer, s'il existe, le maximum de $\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

107 Exponentielle et Taylor

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

108 Encadrement de e

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

109 Du x en haut et en bas

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
   On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I.
   Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Même question avec $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

110 Une inégalité

Montrer que $\quad \forall x \in \left]0,1\right[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

111 Une inégalité (délicate ?)

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^t \ \leqslant\ \mathrm{e}^{t^2} \ +\ t$$

Limites

112 Avec du log et de l'exponentielle

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \ln(x) - e^x$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{\exp(x)}}$

113 Avec des fonctions puissances

Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{1/x}$

Fonctions trigonométriques circulaires

114 Graphe

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est périodique.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet l'origine comme centre de symétrie.
4. Tracer $\mathcal{C}_f$.

115 Avec Arctan

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
   On pourra calculer la tangente de cette expression.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1} \right) \right)$.

116 Cosinus et Arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
En déduire une formule analogue pour $\sin(\operatorname{Arctan} x)$.

117 Avec Arctan

1. Montrer que $\quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \ \dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
2. Simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

118 Des identités

Montrer les égalités suivantes :

(i) $\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2} \operatorname{Arccos} x$.

119 Simplification d'une expression avec Arcsin

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.
Soit $x \in \mathcal{D}_f = \dots$.
Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \\ 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \\ \pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \end{cases}$$

120 Équations

Résoudre les équations

(i) $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2} \right) = 2 \operatorname{Arctan} x$

Divertissement !

121 **Formule d'Euler et Formule de Machin**

(i) Montrer la relation $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$ *(formule due à Euler)*.

(ii) Montrer la *formule de Machin* $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.
(Cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales exactes de π).

122 **Encore une formule**

Établir l'égalité $\dfrac{\pi}{4} = 5\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{79}$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

123 **Formules d'addition des fonctions hyperboliques**

Soit x et y deux réels. Montrer les formules suivantes :

(i) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

(ii) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

(iii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

(iv) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$

124 **Une espèce de formule de Moivre**

Rappeler la formule de Moivre chez les nombres complexes.
Montrer : $\forall\, p \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p = \operatorname{ch}(px) + \operatorname{sh}(px)$.

125 **Duplication**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant la formule de duplication du sinus hyperbolique, simplifier $2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

126 **Un exo de khôlle !**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x = 0$.

127 **Sommes**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx+y)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx+y)$.

128 **Fonctions hyperboliques réciproques**

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $y = \operatorname{sh} x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?
2. Même question avec la fonction ch.

129 **La fonction tangente hyperbolique**

On appelle *tangente hyperbolique* et on note th la fonction $\dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

1. Étudier la fonction th et tracer son graphe.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ et $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$, on a $\left(\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right)^n = \dfrac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$.
4. Montrer que th est injective sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans son image. Déterminer une expression de sa réciproque, notée Argth.

Fonctions usuelles
corrigés

(i) $x \longmapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

$\mathcal{D}$éri $= \mathbb{R}^*$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{a}{x^2}}\right) = (-a)(-2)\, x^{-3}\, e^{-\frac{a}{x^2}}$$

$$= \frac{2a}{x^3}\, e^{-\frac{a}{x^2}}$$

(ii) $x \longmapsto x - a\sqrt{x}$

$\mathcal{D}$éf $= \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{D}$éri $=]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx}\left(x - a\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

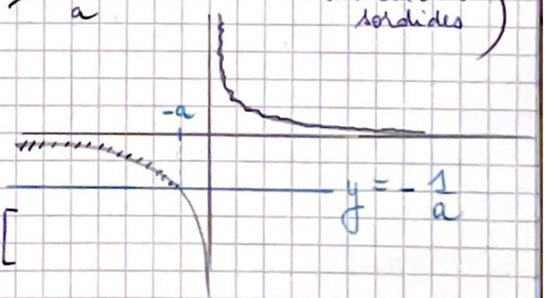
(iii) $x \longmapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right]$

• $\mathcal{D}$éf ?

On résout l'inéquation $1 + \frac{a}{x} > 0$ (le + efficacem^t possible et au brouillon si vous faites des calculs sordides)

Cela équivaut à chercher les x tq $\frac{1}{x} > -\frac{1}{a}$
(rappel: a est positif)

Petit dessin efficace :



BILAN :

$\mathcal{D}$éf $=]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$

• $\mathcal{D}$éri = idem que $\mathcal{D}$éf

• $$\frac{d}{dx}\left(\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x\right) = \left[1 . \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}}\right] \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right]$$

$$= \left[\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{-a}{x + a}\right]\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

(iv) $x \longmapsto \sqrt{1+\cos^2 x}$

On a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 1+\cos^2 x \geqslant 1$

- A fortiori,
  $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+\cos^2 x \geqslant 0$
  D'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

- A fortiori
  $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+\cos^2 x > 0$
  D'où $\mathcal{D}ér = \mathbb{R}$.

- $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right) = \frac{2(-\sin x)(\cos x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

(v) $x \longmapsto (ax+b)^x = \exp\left[x \ln(ax+b)\right]$

- $\mathcal{D} = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$
- $\mathcal{D}ér$ = idem
- $$\frac{d}{dx}\left((ax+b)^x\right) = \left[\ln(ax+b) + x\frac{a}{ax+b}\right](ax+b)^x$$

(vi) $x \longmapsto \dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin x}$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0\,[\pi]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]0+k\pi, \pi+k\pi\right[$
- $\mathcal{D}ér$ idem
- $$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{-(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x - \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{(\sin x)^2}$$

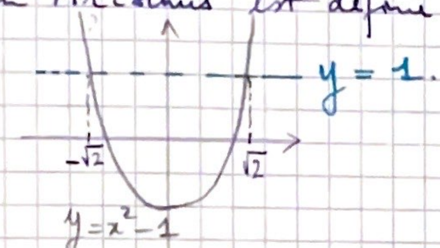
(vii) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(e^x)$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}ér$ idem
- $$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

(viii) $x \longmapsto \text{Arcsin}(x^2-1)$

La fonction Arcsinus est défini sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$

On a :



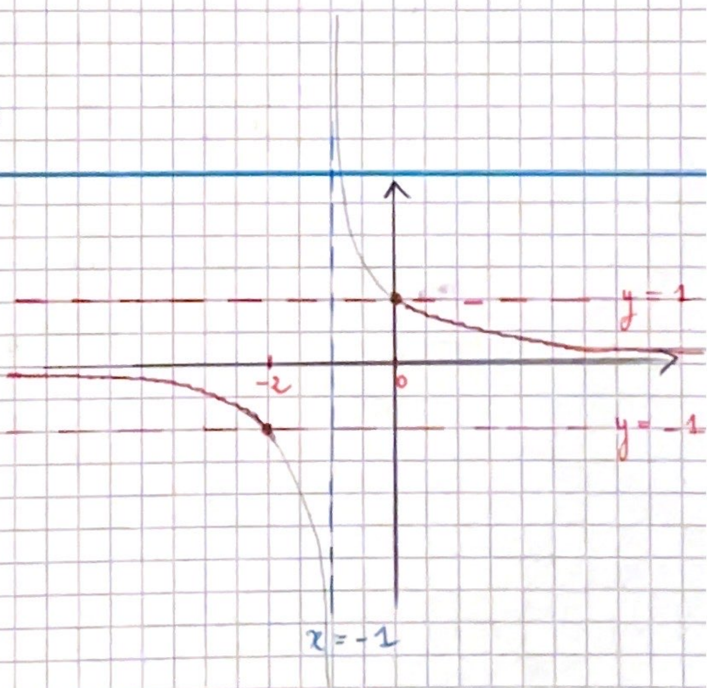
D'où $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et $\mathcal{D}éri =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$$

$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

(ix) $x \longmapsto \text{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right)$



On a $\mathcal{D} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

$\mathcal{D}éri =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{-\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x)^2-1}}{|1+x|}}$$

$$= \frac{|1+x|}{(1+x)^2\sqrt{x(x+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}\,|1+x|}$$ en mult. en haut et en bas par $|1+x|$ et en utilisant le fait que $|1+x|^2 = (1+x)^2$

$(x) \quad x \longmapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0\ [2\pi]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]0 + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi\right[$$

Déri = idem $\qquad = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi,\ 2(k+1)\pi\right[$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{d}{dx}\left(\cos^3 x \times (1-\cos x)^{-2}\right)$$

$$= 3(-\sin x)(\cos^2 x)(1-\cos x)^{-2} + \cos^3 x \cdot (-2)(\sin x)(1-\cos x)^{-3}$$

$$= -\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (1-\cos x)^{-3}\left[3(1-\cos x) + 2\cos x\right]$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos^2 x}{(1-\cos x)^3}\left[3 - \cos x\right]$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x - 3)}{(1-\cos x)^3}$$

(i) Soit $x \in \mathcal{D} =]0, +\infty[$

On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} \iff \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3x}\right)$$

$$\iff \frac{x+3}{2} = \sqrt{3x}$$

$$\iff \frac{(x+3)^2}{4} = 3x$$

$$\iff (x+3)^2 - 12x = 0$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\iff (x-3)^2 = 0$$

$$\iff x = 3.$$

(i) • Ensemble de définition $\mathcal{D}$ de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) \text{ existe} \\ \ln x \quad \text{existe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x+3}{2} > 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in]0, +\infty[$$

Bilan :

$\mathcal{D} =]0, +\infty[$

(ii) • $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

• Soit $x \in \mathcal{D}$

On a les équivalences suivantes.

$$3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \iff 3^{2x}\left(1+3^{-1}\right) = 2^{x}\left(2^{\frac{7}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \frac{2^{1/2}\left(2^3+1\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \frac{9 \times 3}{4 \times 2^{-1/2}}$$

$$= \frac{9\sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$$

WHY

$$\iff x = \frac{3}{2}$$

⚠ On vérifie que $\frac{3}{2} \in \mathcal{D}$

cours // à savoir

Justification du WHY

Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, $x, x' \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence $a^{x} = a^{x'} \iff x = x'$

En effet, la fonction $x \longmapsto a^{x} = \exp[x \ln a]$ est injective car strictement monotone

BILAN $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

(iii) • **Recherche du domaine de définition**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

- $\sqrt{x}^{x} = \exp[x \ln\sqrt{x}]$ existe $\Leftrightarrow \sqrt{x} > 0$
$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

- $x^{\sqrt{x}} = \exp[\sqrt{x} \ln x]$ existe $\Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $x > 0$
$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

Ainsi $\mathcal{D} =]0, +\infty[\cap]0, +\infty[$

$\mathcal{D} =]0, +\infty[$

• **Résolution**

Soit $x \in \mathcal{D}$.

On a les équivalences :

$$\sqrt{x}^{x} = x^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \exp[x\ln\sqrt{x}] = \exp[\sqrt{x}\ln x]$$
$$\Leftrightarrow x\ln\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x \ln x = \sqrt{x} \ln x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x \left[\frac{1}{2}\sqrt{x} - 1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \text{ ou } \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4$$

⚠ Vérifier que les potentielles solutions appartiennent à $\mathcal{D}$.

On a $0 \notin \mathcal{D}$; $1 \in \mathcal{D}$; $4 \in \mathcal{D}$.

BILAN $\boxed{\mathcal{S} = \{1 ; 4\}}$

(iv) • Recherche de l'ens. de définition $\mathcal{D}$ de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} \ln|2x+1| \text{ existe} \\ \ln|x+3| \text{ existe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ \text{et} \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff x \neq -\frac{1}{2} \text{ et } x \neq -3.$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-3 \,;\, -\tfrac{1}{2}\right\}$$

• Résolution.

Soit $x \in \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 \iff \ln|(2x+1)(x+3)| < \ln 3$$

$$\iff |(2x+1)(x+3)| < 3.$$

$$\iff \begin{cases} (2x+1)(x+3) < 3 \\ \text{et} \\ (2x+1)(x+3) > -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2+7x < 0 \\ \text{et} \\ 2x^2+7x+6 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left]-\tfrac{7}{2}, 0\right[\\ \text{et} \\ x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-\tfrac{3}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

$$\iff x \in \left]-\tfrac{7}{2} ; -2\right[\cup \left]-\tfrac{3}{2}, 0\right[$$

⚠ Ne pas oublier $x \in \mathcal{D}$

BILAN : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\tfrac{7}{2}, -3\right[\cup \left]-3, -2\right[\cup \left]-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}, 0\right[}$

(i) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$$

f est impaire

f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$

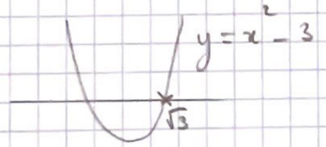
x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$-\frac{9}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

<u>Limites</u>

Par imparité de f, il suffit de justifier les limites en $\sqrt{3}^-$; $\sqrt{3}^+$; $+\infty$.

$\boxed{\text{En } \sqrt{3}}$

On a



donc $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} (x^2 - 3) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} (x^2 - 3) = 0^+$

D'où $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} \dfrac{1}{x^2-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \dfrac{1}{x^2-3} = +\infty$

Puis $\lim\limits_{\sqrt{3}^-} f = -\infty \qquad \lim\limits_{\sqrt{3}^+} f = +\infty$

$\boxed{\text{En } +\infty}$ On a $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3} = \dfrac{x^3}{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{x}{1-\frac{3}{x^2}} \longrightarrow +\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{3}{x^2} = 1$

Par quotient, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Bonus Montrons que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1-\frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

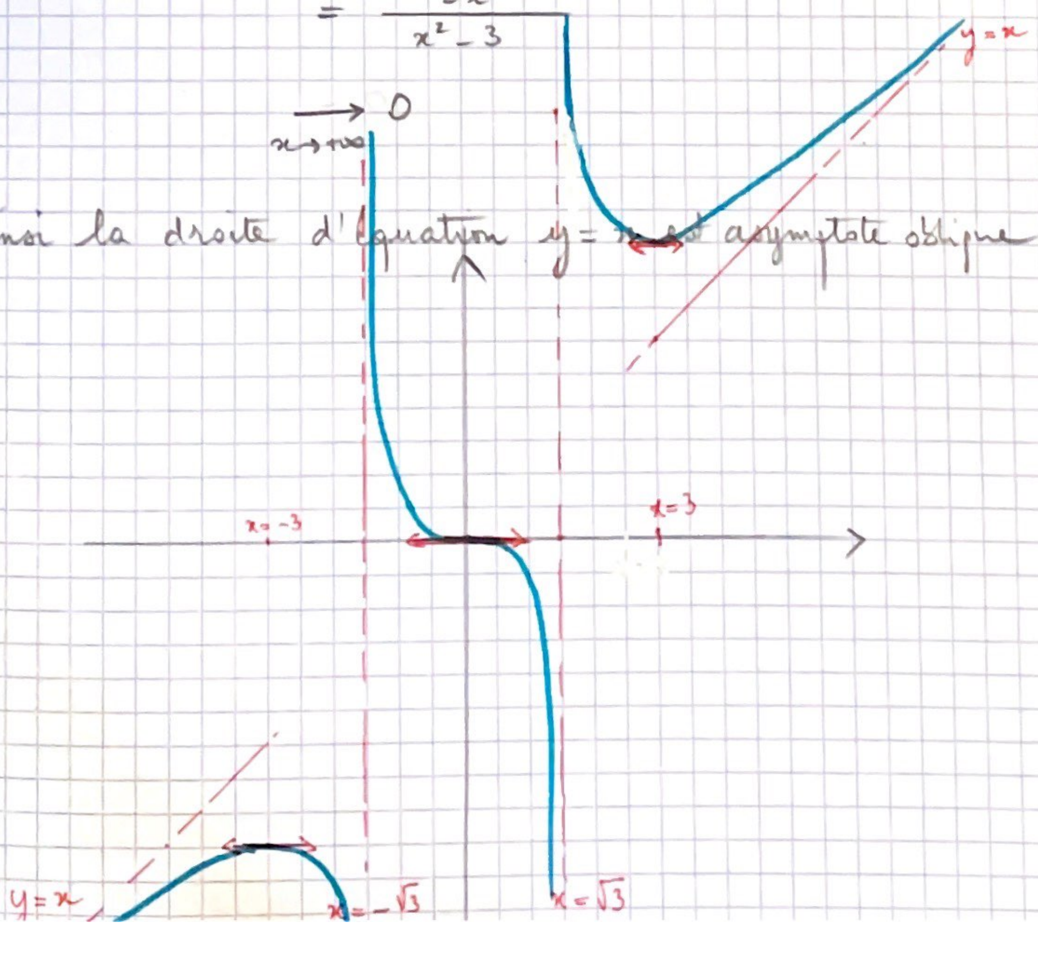
Puis $f(x) - x = \dfrac{x^3}{x^2-3} - x$

$= \dfrac{x^3 - x(x^2-3)}{x^2-3}$

$= \dfrac{3x}{x^2-3}$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$



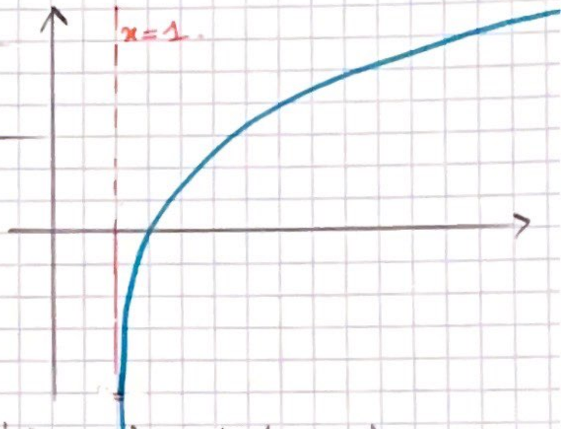
(ii) $f : x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$

$\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{2x}{x^2-1}$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



<u>Limite en 1^+</u>

- On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x+1) = \ln 2$

Par somme $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

<u>Limite en $+\infty$</u>

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

iii) $f : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

f est paire.

Sur $]1, +\infty[$, f est égale à la fonction précédente (positi

En effet :

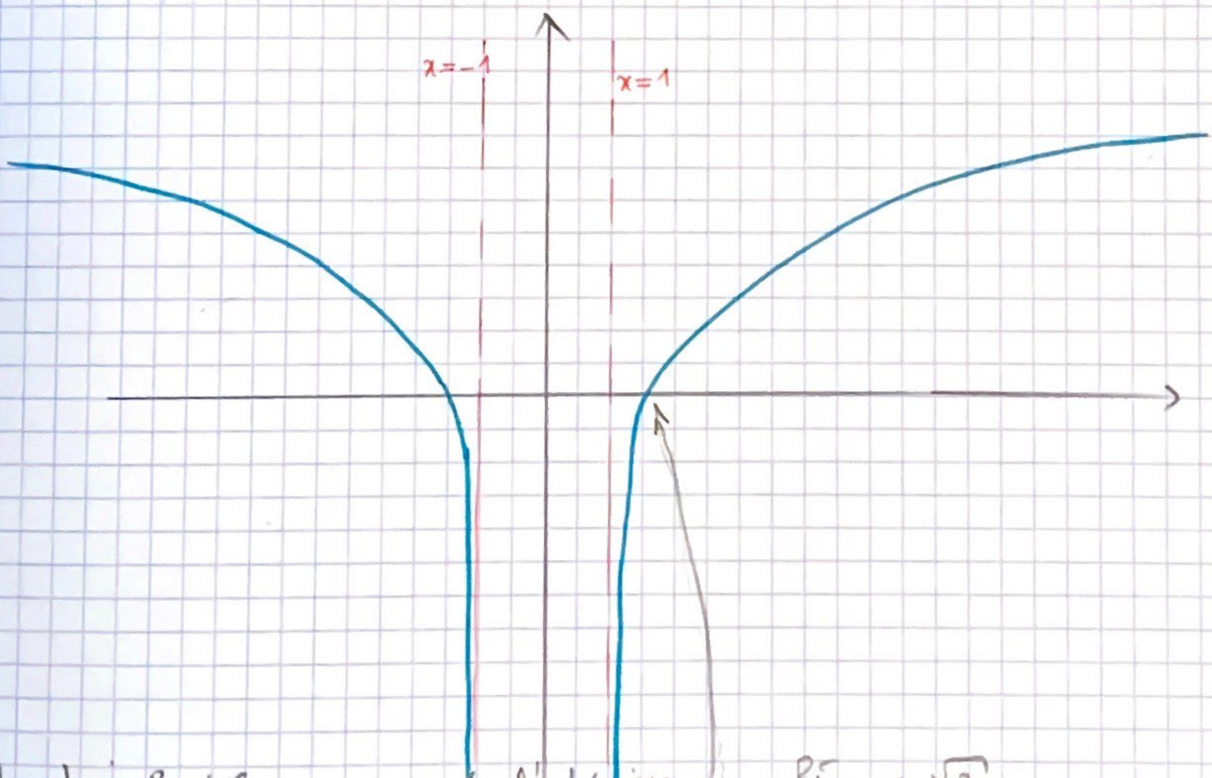
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad x^2 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\geq 0}\underbrace{(x+1)}_{\geq 0}$$

D'où

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \ln(x^2 - 1) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

D'après l'étude précédente, on a donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Question BONUS : que vaut l'abscisse   Réponse $\sqrt{2}$

On résout $f(x) = 0$ càd $\ln(x^2 - 1) = \ln 1$ càd $x^2 - 1 = 1$
càd $x^2 = 2$.

iv) $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

- Recherche de $\mathcal{D}_f$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a l'équivalence :

  $$x \in \mathcal{D}_f \iff \frac{\ln|x|}{x} \text{ existe et } \frac{\ln|x|}{x} \geqslant 0$$

  $$\iff x \neq 0 \text{ et } x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Bilan $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$

- f est dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

  En effet :

  - $x \longmapsto \dfrac{\ln|x|}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$
  - $t \longmapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

  Par composition, f est dérivable sur $\mathcal{D}'$.

On a

$$\forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln|x|}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}}$$

$$= \frac{1 - \ln|x|}{2x^2} \times \sqrt{\frac{x}{\ln|x|}}$$

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\Vert$		0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	

Limite en 0^-

On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par produit $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\ln|x|}{x} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

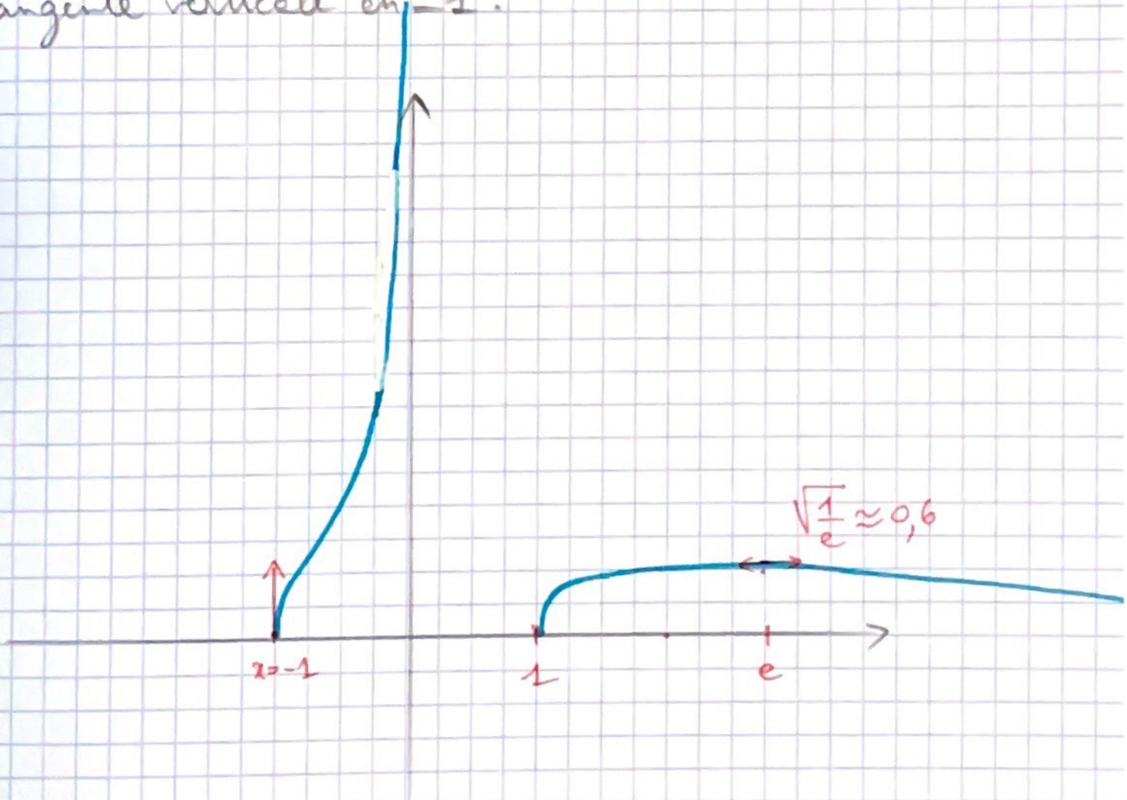
Limite en $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$ par croiss. comparée

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Bonus On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$

On verra + tard que cela témoigne d'une tangente verticale en -1.



(V) $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$

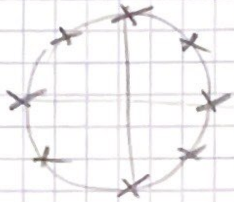
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a :

  $$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} \tan(2x) \text{ existe} \\ \tan x \text{ existe et non nul.} \end{cases}$$

  $$\iff \begin{cases} 2x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \not\equiv 0 [\pi] \end{cases}$$

  $$\iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{4} [\pi/2] \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \not\equiv 0 [\pi] \end{cases}$$



- f est paire et π-périodique

  On peut restreindre l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}] \cap \mathcal{D}_f$.

  où $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right[$

  $$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\frac{\pi}{4}; (2k+1)\frac{\pi}{4}\right[\cup \left](2k+1)\frac{\pi}{4}; (2k+2)\frac{\pi}{4}\right[$$

On peut donc restreindre l'étude de f à

$$\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

- f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

  Utilisons l'expression suivante de f :

  $$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{2}{1 - \tan^2 x}$$

  obtenue avec $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{4\tan x\,(1 + \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)^2}$$

D'où le tableau sur $]0,\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	‖
f	‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0 ‖

En 0

On a $f(x) = 2\,\dfrac{\tan(2x)}{2x} \times \dfrac{1}{\frac{\tan x}{x}}$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{2x} = 1$

Par quotient, puis produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

En $\pi/4$

- On a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} 2x = \frac{\pi}{2}^-$ d'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan(2x) = +\infty$

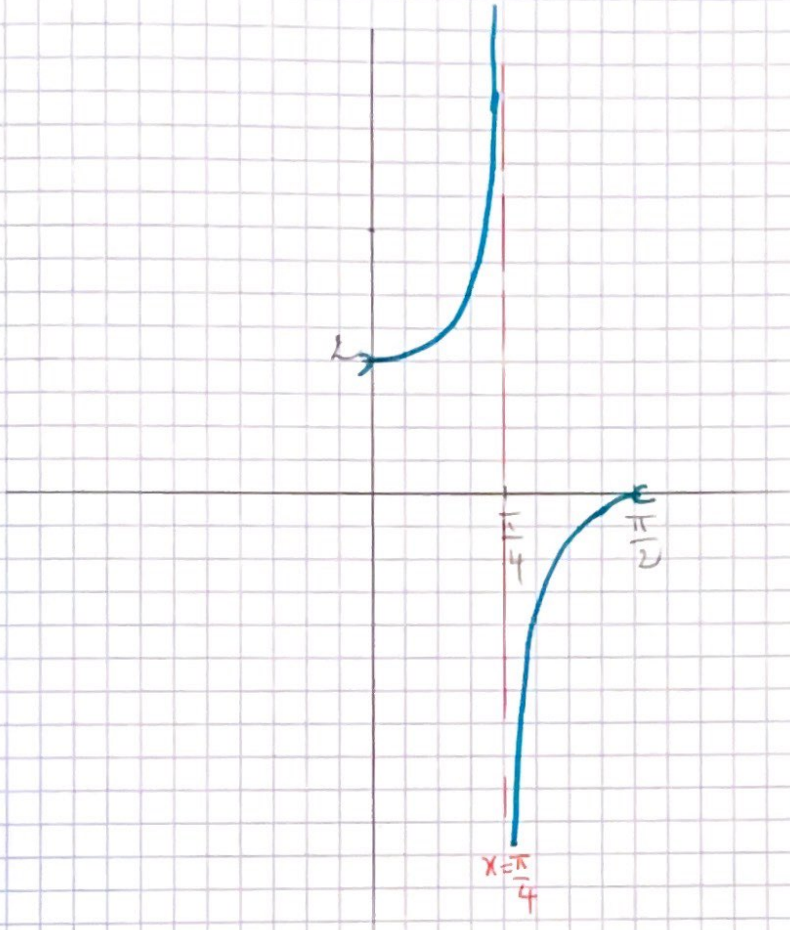
  et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan x = 1$

  Par quotient $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty$

- Etude analogue en $\frac{\pi}{4}^+$

En $\frac{\pi}{2}^-$ On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(2x) = 0$ (WHY) $\Big\}$ par produit

On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\tan x} = 0$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$



Le graphe de f sur $]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ que l'on prolonge par symétrie axiale d'axe (Oy) à $[-\frac{\pi}{2}, 0] \cap \mathcal{D}_f$

Puis par translation, on prolonge à $\mathcal{D}_f$.

(VI) $f : x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est paire donc on peut se restreindre à $]0, +\infty[$ pour l'étude

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 1 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

Pour étudier le signe de f', on étudie les variations de f'

f' est dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} - \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-(x^2+1) + x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x^2+1)^2}$$

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
f'		$\searrow$	0
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

Limite en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to +\infty} \text{Arctan}\, t = \pi/2 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pi/2$

Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Limite en $+\infty$

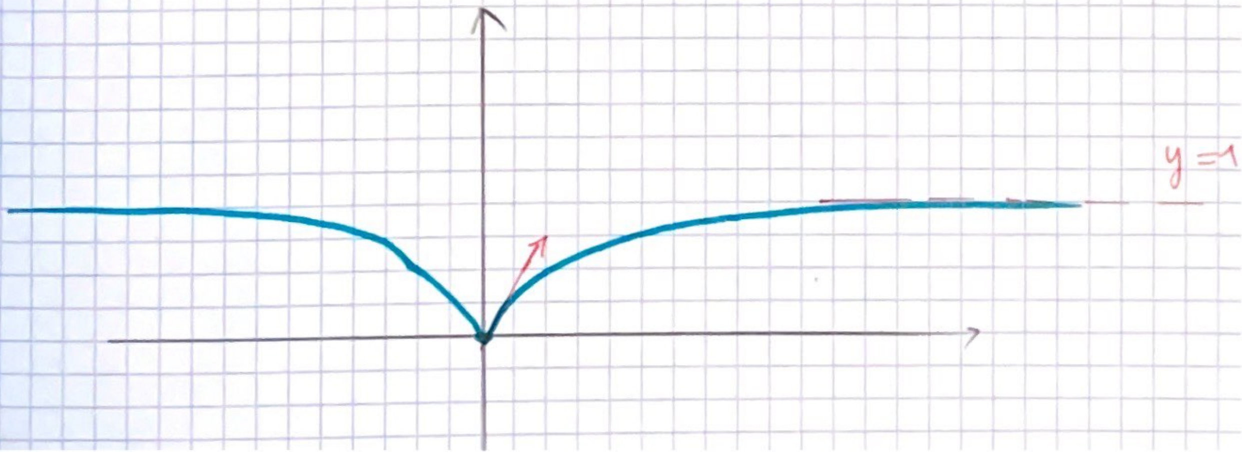
On a $f(x) = \dfrac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{\text{Arctan}\, t}{t} = 1 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Bonus pour tracer le graphe au voisinage de 0.

On peut montrer (faites-le) que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \pi/2$

On apprendra + tard que cela implique la présence d'une tangente en 0 de coeff dir $\pi/2$.



(vii) $f : x \mapsto \sin(3x) + 3\sin x$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- f est impaire
- f est (2π)-périodique
- On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3\cos(3x) + 3\cos x$$
$$= 3\left[\cos(3x) + \cos x\right]$$
$$= 6\cos(2x)\cos x \quad \text{avec le rappel}$$

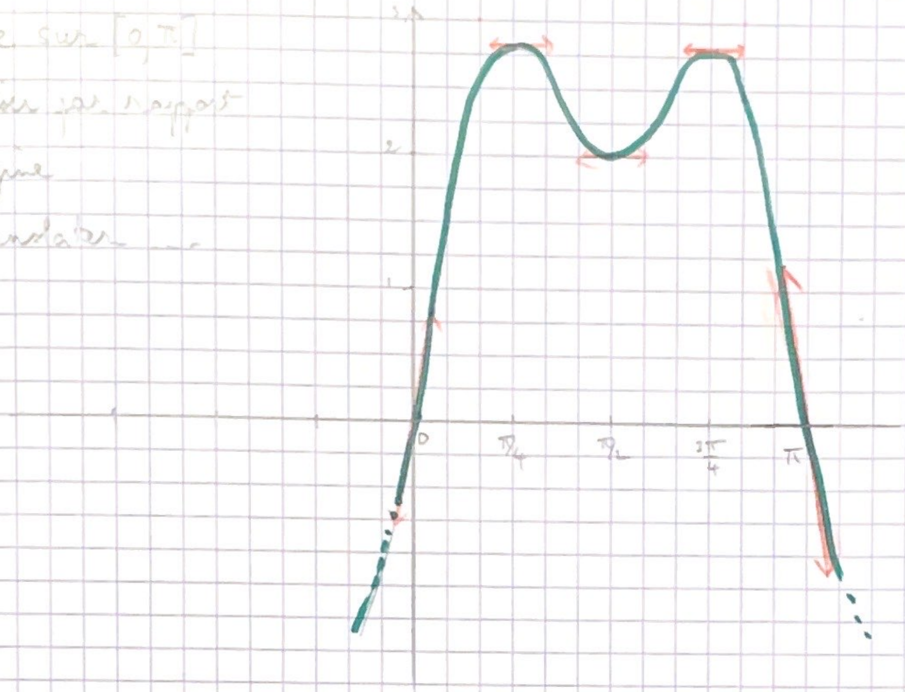
<u>Rappel</u> $\cos p + \cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$
$$= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

<u>Bonus</u> On peut montrer que $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie.

La courbe sur $[0, \pi]$
à symétriser par rapport
à l'origine
puis à translater ...



<u>Bonus</u> : $f'(0) = 6$ donc on peut tracer la tangente au point d'abscisse 0.

et $f'(\pi) = -6$.

i) L'expression donnée a un sens dès que $x \neq \pm\sqrt{3}$ donc on a une fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3}{x^2-3}. \end{array}$$

Quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, f est impaire. Nous allons donc l'étudier sur $E = \mathbb{R}_+ \setminus \{\sqrt{3}\}$.
La fonction f est dérivable par opérations.
Soit $x \in E$. On a

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3(2x)}{(x^2-3)^2}.$$

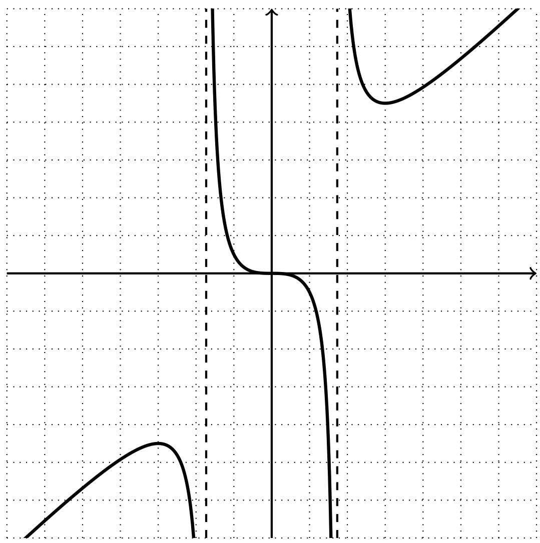
Le dénominateur étant > 0, $f(x)$ est du même signe que

$$3x^2(x^2-3) - x^2(2x) = x^2(3x^2 - 9 - 2x^2) = x^2(x^2-9) = x^2(x-3)\underbrace{(x+3)}_{>0}.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant de f sur E.

x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
f'	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$9/2$	$\nearrow$	$+\infty$

La seule limite un peu subtile est celle en $+\infty$, que l'on obtient en factorisant numérateur et dénominateur par les termes prépondérants : quel que soit $x \in E$, on a $\frac{x^3}{x^2-3} = x\frac{1}{1-\frac{3}{x}}$.
Comme on a $\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, il s'ensuit $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Voilà enfin le graphe de f.



ii) L'expression donnée a un sens si et seulement si $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x^2 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $|x| > 1$. On a donc une fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2 - 1). \end{array}$$

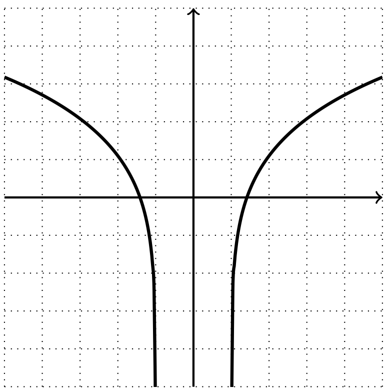
Composée (dans le bon sens !) d'une fonction quelconque et d'une fonction paire, f est paire, donc nous allons simplement l'étudier sur $]1, +\infty[$.
La fonction f est dérivable par opérations.
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} > 0,$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Les limites se calculent très simplement et on obtient le tableau de variations suivant de f sur $]1, +\infty[$.

x	1		$+\infty$
f'	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Voilà enfin le graphe de f.



iii) On voit directement que l'expression $\frac{\ln|x|}{x}$ a un sens si et seulement si $x \neq 0$. Pour déterminer quand cette quantité est $\geqslant 0$ (de telle sorte que sa racine carrée soit définie), on peut par exemple procéder à une disjonction de cas :

- si $x \in]-\infty, -1[$, $\ln|x| > 0$ et $x < 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;
- si $x \in [-1, 0[$, $\ln|x| < 0$ et $x < 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée est définie ;
- si $x \in]0, 1[$, $\ln|x| < 0$ et $x > 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;
- si $x \in [1, +\infty[$, $\ln|x| > 0$ et $x > 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée n'est pas définie.

L'expression donnée a donc un sens si et seulement si $x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$, ce qui nous donne une fonction

$$f : \begin{array}{rcl} [-1, 0[\cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}. \end{array}$$

(a) Sur $[-1, 0[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(-x)}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 0[$.
Soit $x \in]-1, 0[$. On a

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1 - \ln(-x)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln(-x)}{x}}},$$

qui est du même signe que $1 - \ln(-x)$, c'est-à-dire > 0.

(b) Sur $[1, +\infty[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a

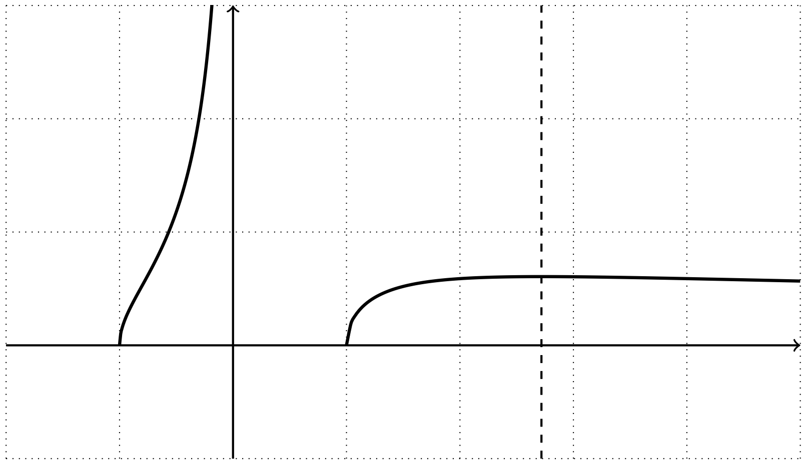
$$f'(x) = \frac{\dfrac{1 - \ln x}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}},$$

qui est du même signe que $1 - \ln x$.

On obtient ainsi le tableau de variations de f.

x	-1		0		1		e		$+\infty$
f'		$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖		0	$\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$	0

Voici enfin le graphe de f.



iv) L'expression donnée est définie si et seulement si $x \in D_{\tan}$ et $\tan(x) \neq 0$ et $2x \in D_{\tan}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \end{cases} \\ &\iff x \neq 0 \mod \pi/2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\tan(2x)}{\tan(x)} \text{ bien définie } &\iff \begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \\ 2x & \in D_{\tan} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \\ 2x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \not\equiv 0 & \mod \pi/2 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{4} & \mod \pi/2 \end{cases} \\ &\iff x \not\equiv 0 \mod \pi/4. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on définit $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \mod \pi/4 \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\frac{\pi}{4}, (k+1)\frac{\pi}{4} \right[$, on a une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{\tan(2x)}{\tan x} \end{array}.$$

Le domaine D est (clairement) $\frac{\pi}{4}$-périodique et symétrique. Quotient de deux fonctions impaires, la fonction f est paire. Quotient de deux fonctions π-périodiques, elle est π-périodique. On va donc se contenter de l'étudier sur $E = \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
La formule d'addition de la tangente permet de voir que

$$\forall x \in D, f(x) = \frac{2}{1 - \tan^2(x)}.$$

La fonction f est dérivable par opérations. Soit $x \in E$. On a (en utilisant la formule $\tan' = 1/\cos^2$, ici plus judicieuse car elle donne des expressions plus factorisées)

$$f'(x) = \frac{2\frac{1}{\cos^2(2x)} \tan x - \tan(2x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}.$$

Comme $\tan^2 x > 0$ (car $x \in D$), cette expression a le même signe que son numérateur. On peut en fait encore la simplifier davantage en multipliant par $\cos^2(x)\cos^2(2x)$, également > 0 car $x \in D$ (donc $x, 2x \in D_{\tan}$) : $f'(x)$ est du même signe que

$$\begin{aligned} 2\tan(x)\cos^2(x) - \tan(2x)\cos^2(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x)(1 - \cos(2x)). \end{aligned}$$

Or, comme $x \in E$, on a $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin(2x), 1 - \cos(2x) > 0$.
On a donc montré que $\forall x \in E, f'(x) > 0$, ce qui montre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles qui constituent E, c'est-à-dire $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il était en fait plus judicieux de s'éloigner un peu du plan du cours et d'utiliser la fomule alternative, qui permet d'écrire, sur chacun des intervalles que l'on considère, la fonction f comme composée de fonctions dont on connaît le sens de variations. On obtenait directement que f était strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.
On obtient alors le tableau de variations de f sur E.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$+$	||	$+$	||
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Justification des limites.

(a) La limite en 0^+ est la plus délicate à déterminer. Il y a au moins deux possibilités :

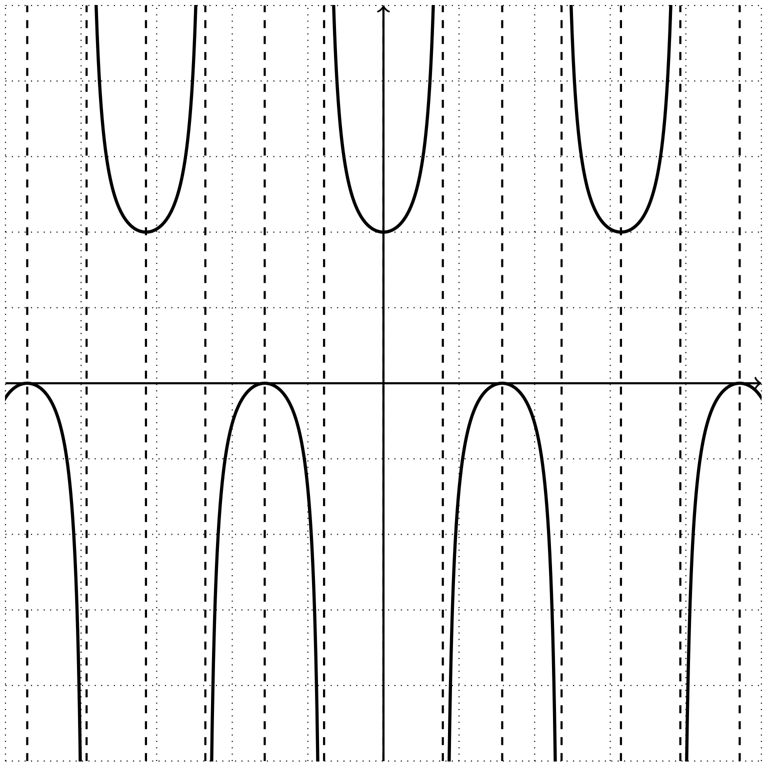
- on utilise la formule alternative que l'on a énoncée en remarque, en ajoutant que, par continuité de la fonction tangente, on a $\tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$;
- on utilise le fait que la fonction tan (resp. $x \mapsto \tan(2x)$) est dérivable en 0, de dérivée 1 (resp. 2), ce qui donne, par définition, les limites des taux d'accroissement
$$\frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\tan(2x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$
En passant au quotient, on obtient
$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

(b) Les limites en $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\pm}$ sont plutôt faciles. Par continuité de tan en $\frac{\pi}{4}$, on a
$$\tan(x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{\pm}]{} \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$
donc
$$\tan(x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{-}]{} +\infty \qquad \text{et} \tan(2x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{+}]{} -\infty.$$

(c) On a, par exemple par continuité de tan en π, que
$$\tan(2x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}]{} 0.$$
Comme en outre $\tan x \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}^{-}]{} +\infty$, on en déduit
$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}^{-}]{} 0.$$

Encore une fois, c'était également faisable (et facile) avec la formule alternative.

Voici le graphe de f, prolongé par parité et périodicité.



v) La formule donnée a un sens pour $x \neq 0$ et définit une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}. \end{array}$

Cette fonction est paire en tant que produit de deux fonctions impaires (le deuxième facteur $x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ étant impair comme composée de deux fonctions impaires). Nous allons donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Déterminer le signe de cette expression n'est pas aisé, mais on peut constater que la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est à son tour dérivable par opérations (autrement dit, f est deux fois dérivable) et calculer f''.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1 + x^2 - x\,2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

On obtient alors successivement un tableau de variations pour f', ce qui nous donne son signe, et nous donne alors le tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
f''	$-$	
f'	$?$ $\searrow$	0
f	0 $\nearrow$	1

Justification des limites.

(a) Commençons par la limite de f' en $+\infty$.

(b) L'expression donnée ayant clairement un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(3x) + 3\sin(x). \end{array}$

La fonction étant impaire et 2π-périodique, on va l'étudier sur la demi-période $D = [0, \pi]$.

La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in D$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(3x) + 3\cos(x) \\ &= 3\left(\cos(3x) + \cos(x)\right). \end{aligned}$$

Commençons par déterminer les zéros de cette dérivée. Soit $x \in D$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff \cos(3x) = -\cos(x) \\
&\iff \cos(3x) = \cos(\pi + x) \\
&\overset{\star}{\iff} 3x \equiv \pi + x \mod 2\pi \text{ ou } 3x \equiv -(x+\pi) \mod 2\pi \\
&\overset{\star\star}{\iff} 2x \equiv \pi \mod 2\pi \text{ ou } 4x \equiv \pi \mod 2\pi \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi/2 \\
&\overset{\star\star\star}{\iff} x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}\right) \\
&\iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}.
\end{aligned}$$

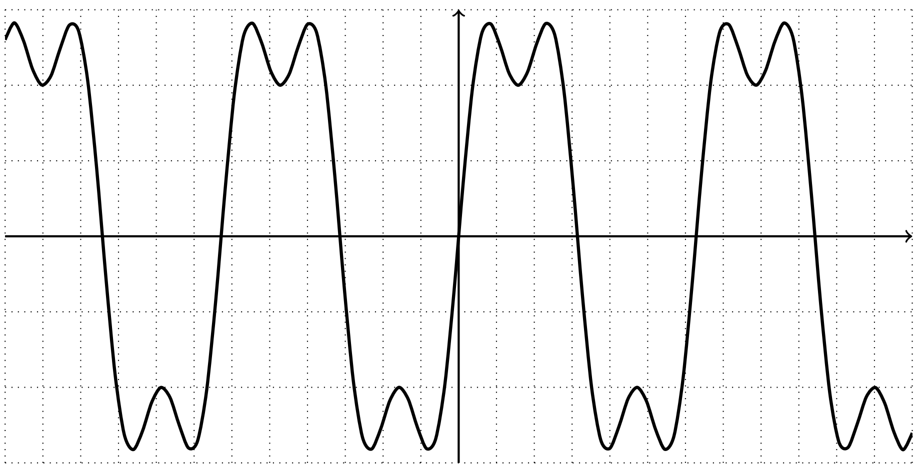
Justifications.

- $\star$ Cas d'égalité des cosinus.
- $\star\star$ Car $-\pi \equiv \pi \mod 2\pi$.
- $\star\star\star$ Car $x \in [0, \pi]$.

En calculant des valeurs de f' (par exemple en 0, $\pi/3$, $2\pi/3$ et π), on obtient donc le tableau de signes de f', ce qui nous donne le tableau de variations de f.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Voici le graphe de f, prolongé par imparité et périodicité. Attention, le repère n'est pas orthonormé.



107

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ »}$$

Il peut être utile de poser $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ de sorte que $\mathcal{H}_n$ s'énonce :

$$\mathcal{H}_n : \text{« la fonction } f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R}^+ \text{ »}$$

Initialisation.

Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$$

Or $\mathrm{e}^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!}$.

D'où $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

La fonction f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f'_{n+1}(x) &= \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n+1} k \frac{x^{k-1}}{k!} \\ &= \mathrm{e}^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

D'après $\mathcal{H}_n$, la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que la fonction f'_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Donc la fonction f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or $f_{n+1}(0) = 0$.
Donc f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}^+$.

110

Posons

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^x(1-x)^{1-x} = \exp\left(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right). \end{array}$$

Posons enfin, dans un souci de simplicité,

$$\begin{array}{rccl} g: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\ln x + (1-x)\ln(1-x). \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ (par somme de telles fonctions), et on a :

$$\forall\, x \in\,]0,1[, \qquad \begin{array}{rcl} g'(x) & = & \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 \\ & = & \ln x - \ln(1-x) \end{array}$$

Par stricte croissance du logarithme, le signe de cette expression (c'est-à-dire la position relative de $\ln x$ et $\ln(1-x)$) ne dépend que de la position relative de x et de $1-x$. On dresse alors facilement le tableau de variations suivant.

x	0		$1/2$		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$?$	$\searrow$	$\ln\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$?$

Cela démontre $\forall x \in\,]0,1[,\ g(x) \geqslant \ln\frac{1}{2}$.
La fonction exponentielle étant croissante, on a :

$$\forall x \in\,]0,1[, \quad f(x) \geqslant \frac{1}{2}$$

111

Posons $f : t \mapsto e^{t^2} + t - e^t$ et montrons que f est positive.
On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2te^{t^2} + 1 - e^t \qquad \text{et} \qquad f''(t) = (4t^2 + 2)e^{t^2} - e^t.$$

— Si $t \notin [0, 1]$, on a $f''(t) > 0$ car $t^2 \geqslant t$ et donc $(4t^2 + 2)e^{t^2} \geqslant 2e^t > e^t$.

— Si $t \in [0, 1]$, on écrit $f''(t) = e^{t^2}\left(4t^2 + 2 - e^{t-t^2}\right)$.

Comme $t - t^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $t \in [0, 1]$, on a $e^{t-t^2} \leqslant e^{\frac{1}{4}} < 2$ et donc $f''(t) > 0$.

La fonction f' croît sur $\mathbb{R}$.
Comme $f'(0) = 0$, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Le minimum de f est obtenu en 0 et vaut $f(0) = 0$.
Ainsi :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \leqslant e^{t^2} + t.$$

Autre stratégie.

On peut aussi poser $f : t \mapsto \frac{e^{t^2}+t}{e^t} = e^{t^2-t} + te^{-t}$.
Et il s'agit de montrer que f est supérieure à 1.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : t \mapsto (2t - 1)e^{t^2-t} + (1 - t)e^{-t}$.
Comme $e^{-t} > 0$, le réel $f'(t)$ est du signe de $g(t) := (2t - 1)e^{t^2} + (1 - t)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : t \mapsto (4t^2 - 2t + 2)e^{t^2} - 1$.
Le minimum de $t \mapsto 4t^2 - 2t + 2$ vaut $\frac{7}{4}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) \geqslant \frac{7}{4} - 1 > 0$.
Ainsi, la fonction g est croissante.
Comme $g(0) = 0$, la fonction g est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Il en est de même de f'.
Le minimum de f est obtenu en 0 et il vaut $f(0) = 1$.

115

1. — On a $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   En effet, la fonction Arctan est croissante, donc $\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$, a fortiori $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) > -\frac{\pi}{2}$.
   De plus, $\operatorname{Arctan}(k+1) < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$ (car $k \geqslant 0$), donc $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) < \frac{\pi}{2}$.
   — La formule d'addition de tan prouve que
   $$\tan\big(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k\big) = \frac{(1+k)-k}{1+(1+k)k} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$
   Ces deux points montre que :
   $$\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

2. On a
   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k) \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) && \text{(télescopie)} \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1)\end{aligned}$$
   On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

   Remarque. Plus tard, dans l'année, on dira que la série de terme général $\dfrac{1}{k^2+k+1}$ converge et que sa *somme* vaut :
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

119

On a
$$\mathcal{D}_f \;=\; \Big\{x\in[-1,1] \;\mid\; -1\leqslant 2x\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\Big\}.$$
La double inégalité équivaut, en passant au carré, à
$$4x^2(1-x^2)\leqslant 1 \iff 4x^4-4x^2+1\geqslant 0 \iff (2x^2-1)^2\geqslant 0.$$
Cette inégalité est toujours vérifiée et donc $\mathcal{D}_f=[-1,1]$.
Soit $x\in\mathcal{D}_f$. Alors x s'écrit $\sin t$ avec $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. On a alors
$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Arcsin}(2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t})\\ &= \operatorname{Arcsin}(2\sin t\cos t) \text{ car } t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ &= \operatorname{Arcsin}(\sin 2t).\end{aligned}$$
On peut alors simplifier cette expression, mais il faut prendre garde que $\operatorname{Arcsin}(\sin u)=u$ seulement pour $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
Dans les autres cas, il faut se ramener à cet intervalle en utilisant les propriétés de la fonction sinus. On trouve

— Si $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, on a $2t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\operatorname{Arcsin}(\sin 2t)=2t$.

— Si $t\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\pi-2t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, $\sin(\pi-u)=\sin u$.
On en déduit que dans ce cas, $\operatorname{Arcsin}\sin 2t=\operatorname{Arcsin}\sin(\pi-2t)=\pi-2t$.

— Si $t\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$, alors $\pi+2t\in\left[0,-\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, $\sin(\pi+u)=-\sin(u)$.
En utilisant l'imparité de la fonction Arcsin, on trouve dans ce cas que
$$\operatorname{Arcsin}\sin 2t=-\operatorname{Arcsin}(-\sin(2t))=-\operatorname{Arcsin}(\sin(\pi+2t))=-\pi-2t$$

On a
$$f(x) \;=\; \begin{cases} -\pi-2\operatorname{Arcsin}x & \text{si } x\in\left[-1,-\frac{\sqrt2}{2}\right[\\ 2\operatorname{Arcsin}x & \text{si } x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right[\\ \pi-2\operatorname{Arcsin}x & \text{si } x\in\left]\frac{\sqrt2}{2},1\right]\end{cases}$$

1. — Prouvons que l'équation possède une unique solution. La fonction :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1)$$

est continue et strictement croissante (somme de trois fonctions strictement croissantes) et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[= \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

L'équation donnée possède donc une unique solution.
Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la solution est strictement positive.

— Déterminons cette solution.
Soit $x \in \mathbb{R}$ telle que

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

On veut appliquer la fonction tangente.
Pour cela, justifions que les deux réels sont dans $\mathcal{D}_{\tan}$.
On a

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;\in\;]0, \pi[$$

De plus, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;\neq \frac{\pi}{2}$.

Raisonnons par l'absurde. Si on avait $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;=\frac{\pi}{2}$, on aurait alors $\operatorname{Arctan}(x) = 0$, d'où $x = 0$. Mais 0 ne vérifie pas l'égalité initiale.

On a donc montré que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \in \mathcal{D}_{\tan}$$

On peut appliquer la fonction tangente à chacun des membres, ce qui donne :

$$\tan\big(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\big) \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$$

À gauche, on utilise la formule $\tan(a+b)$ et à droite on utilise $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
On obtient l'égalité

$$\frac{2\,x}{2 - x^2} = \frac{1}{x}$$

D'où $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Comme la racine cherchée est positive, on en déduit que $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a prouvé que l'équation donnée possède une unique solution.

Bilan : l'ensemble des solutions est $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$.

2. **Analyse.**

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.
Par définition de la fonction Arcsin, on a

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \;\in\; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

D'où

$$2\operatorname{Arctan} x \;\in\; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Puis

$$\operatorname{Arctan} x \;\in\; \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Puis $x \in [-1, 1]$.

Synthèse.

Soit $x \in [-1, 1]$.
Montrons que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.
Partons du membre gauche, mais avant remarquons que x peut s'écrire $\tan t$.

En effet, on a $x \in [-1,1]$. Comme la fonction tan induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[-1,1]$, il existe un (unique) $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $x = \tan t$.
On a alors

$$\begin{array}{rcll}
\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\,x}{1+x^2}\right) & = & \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\,\tan t}{1+\tan^2 t}\right) & \\
& = & \operatorname{Arcsin}(\sin 2t) & \text{il faut se rappeler de cette formule de l'angle moitié} \\
& = & 2t & \text{car } 2t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\
& = & 2\operatorname{Arctan} x &
\end{array}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc le segment $[-1,1]$.

— Commençons par prouver que $\tan\left(5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}+2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79}\right)=1$.
La formule de Moivre permet d'obtenir :

$$\tan 5t=\frac{\sin 5\,t}{\cos 5\,t}=\frac{5\tan t-10\,\tan t^3+\tan t^5}{1-10\,\tan t^2+5\,\tan t^4}\cdot$$

En remplaçant t par $\mathrm{Arctan}(\frac{1}{7})$, on obtient $\tan(5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7})=\frac{2879}{3353}\cdot$
On trouve de même $\tan(2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79})=\frac{237}{3116}\cdot$
En utilisant la formule d'addition donnant $\tan(a+b)$, on en déduit que :

$$\tan\left(5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}+2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79}\right)=\frac{\frac{2879}{3353}+\frac{237}{3116}}{1-\frac{2879}{3353}\frac{237}{3116}}=1.$$

— Vérifions maintenant $0\leqslant 5\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{7}+2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{3}{79}<\dfrac{3\,\pi}{4}\cdot$
C'est une conséquence de :

$$0\leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79}\leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}\leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

et de :

$$0\leqslant 5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}+2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79}\leqslant\frac{7\,\pi}{6}<\frac{3\,\pi}{4}\cdot$$

On en déduit alors l'égalité demandée.

123

1. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}\right) + \left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}\right)\right] \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\
&= \operatorname{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}\right) + \left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right)\right] \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

124

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^p \\
&= (\mathrm{e}^x)^p \\
&= \mathrm{e}^{px} \\
\text{et} \quad \operatorname{ch} px + \operatorname{sh} px &= \frac{\mathrm{e}^{px} + \mathrm{e}^{-px}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{px} - \mathrm{e}^{-px}}{2} \\
&= \mathrm{e}^{px}.
\end{aligned}$$

Occupons-nous de la première somme.

Si $x = 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx + y) = (n+1)\operatorname{ch} y$.

Désormais, on suppose $x \neq 0$, d'où $\mathrm{e}^x \neq 1$ (ce qui rend licite les calculs ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx+y) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} + \mathrm{e}^{-y}\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y \times \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \times \frac{e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} + \right. \\
&\qquad \left. \mathrm{e}^{-y} \times \frac{e^{-(n+1)x/2}}{e^{-x/2}} \times \frac{e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{nx/2+y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + e^{-nx/2-y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\right) \\
&= \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2} + y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On peut faire un calcul similiaire pour sh et on obtient $\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2} + y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.

Autre solution, ou plutôt autre présentation (la preuve est la même)

Restons dans le cas $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. On peut aussi avantageusement calculer sans trop d'effort les deux sommes en même temps, en considérant la somme et la différence des deux sommes :

$$\begin{aligned}
C_n + S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} \\
&= \mathrm{e}^y \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} \\
&= e^y \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^y e^{\frac{nx}{2}} \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{nx}{2}+y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On a $C_n - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$ et y par $-y$. Ainsi :

$$C_n - S_n = e^{\frac{-nx}{2}-y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

Par somme et différence, on récupère donc

$$C_n = \frac{e^{\frac{nx}{2}+y} + e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2} + y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

$$S_n = \frac{e^{\frac{nx}{2}+y} - e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2} + y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$