Programme de colle n° 20

semaine du 31 mars 2025

Le thème de la colle est « **Algèbre linéaire, dimension finie (sans matrices d'application linéaire, ou alors très peu)** »

Pour les colleurs. Le cours sur les matrices d'applications linéaires a été vu, mais nous n'avons pas encore fait d'exercices (à part ceux du cours).

Analyse asymptotique : les calculs faits en classe (certains seront faits le lundi 24)

Le « montrer que ... admet un DL » pourra être justifié « par opérations »

- Montrer que $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.
- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\frac{\sin(2x)-\operatorname{sh}(2x)}{(2x-\sin x-\tan x)^2}$.
- Déterminer la limite en 0 de $\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x}$.
- Déterminons un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n(n+1)}{1+n^2}$$

- Donner le développement asymptotique à trois termes (ici à la précision $\frac{1}{x}$) de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
  Qu'en déduit-on concernant $\mathscr{C}_f$?
- Un équivalent de la suite implicite (x_n) où $e^{x_n} + x_n = n$. Et puis, ensuite, si l'élève s'en sent la force, un DA à deux termes.

Algèbre linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
  Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où r est à déterminer en fonction de p.
- La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = B$ (on a alors $BA = I_n$).
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  On a

$$A \text{ est inversible} \iff \text{l'équation } AX = 0 \text{ possède une unique solution, à savoir la colonne nulle}$$

  c'est-à-dire :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \Big[\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad \big(AX = 0 \implies X = 0\big)\Big]$$

  Autrement dit, A est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- Question qui sera traitée lundi. Considérons la matrice A_3 (3 car on est en Piston 3 !) suivante :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Donner une base de l'image, et son rang. Puis dans la foulée, donner une base de son noyau (utiliser th du rang et trouver une famille libre du noyau de bon cardinal).

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition. Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim\ker u + \mathrm{rg}(u)$.	
f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.