Programme de colle n° 22

semaine du 28 avril 2025

Le thème de la colle est « **Algèbre linéaire en dimension finie (matrices d'application linéaire) et un tout petit peu d'intégration** »

Pour les colleurs. Nous n'avons fait que quelques exercices d'intégration (consultez le cours pour voir ce qui a été fait). Soyez indulgents.

Un peu d'intégration

- Théorème fondamental de l'analyse
- Taylor reste intégral (par récurrence, ou bien par somme télescopique, au choix de l'élève).
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t$.
  Montrer que f est constante égale à 1 (cf. correction page suivante).
- Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que g est positive.
  Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (cf. correction page 3).
  $$\int_{[a,b]} fg = f(c)\int_{[a,b]} g$$
- Soit $x \in [0,+\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
  Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.
- Savoir énoncer le théorème des Sommes de Riemann et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Un peu de probas

- Prouver l'énoncé suivant

  Proposition.
  - Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a
  $$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 1$$
  - Réciproquement, si Ω est un univers fini, et si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels de $[0,1]$ telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que
  $$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = p_\omega$$
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités totales.
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités composées.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
  On tire au hasard s boules **sans** remise (avec $s \leqslant n$).
  Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».
  - Déterminer la probabilité de E_k.
  - En utilisant le SCÉ $(E_1, \ldots, E_n)$, retrouver une formule bien connue.

  Quelle formule connue trouve-t-on en exploitant le fait que $(E_1, \ldots, E_n)$ est un SCÉ ?
- Même exercice que le précédent **avec** remise.
- Savoir prouver l'exercice suivant

  Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement négligeable est indépendant de n'importe quel événement.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement presque sûr est indépendant de n'importe quel événement.

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
d) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\displaystyle\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.
On a

- g est continue par opérations (car f est continue)
- g est positive, car f est à valeurs dans $[0,1]$
- $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.
Donc $f = f^2$.
Attention ici, à ne pas dire soit $f = 0$, soit $f = 1$!!!!
D'où $\forall\, t \in [0,1],\ \Big(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1\Big)$
Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0,1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.
Aurement dit, on a

$$\Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 1\Big)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

Posons
$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg \,-\, f(x)\int_a^b g \quad = \quad \int_a^b \big(f(t)-f(x)\big)\,g(t)\mathrm{d}t$$
On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c)=0$.

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que
$$f(x_m)=\min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(x_M)=\max_{[a,b]} f$$
D'où
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad f(t)-f(x_m)\geqslant 0$$
D'où, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad \big(f(t)-f(x_m)\big)g(t)\geqslant 0$$
Par positivité de l'intégrale,
$$\int_a^b \big(f(t)-f(x_m)\big)\,g(t)\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0$$
c'est-à-dire $\varphi(x_m)\geqslant 0$.
On montre de même que $\varphi(x_M)\leqslant 0$.
Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ.
Autrement dit, il existe $c\in[\widehat{x_m, x_M}]$ tel que $\varphi(c)=0$.

Autre solution.
On distingue deux cas.
• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$. Alors d'après le « critère de nullité » (toutes les hypothèses sont réunies), g est la fonction nulle.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t>0$.
Montrons que
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$
Sur le segment $[a,b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m=f(x_m)$ et $M=f(x_M)$.
On a
$$\forall\, t\in[a,b], \quad m\leqslant f(t)\leqslant M$$
puis, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \quad mg(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant Mg(t)$$
Par croissance de l'intégrale,
$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
D'où en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est >0
$$f(x_m)=m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \;\leqslant\; M=f(x_M)$$
Ainsi $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f. Autrement dit, il existe $c\in[\widehat{x_m, x_M}]\subset[a,b]$ tel que
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}=f(c)$$