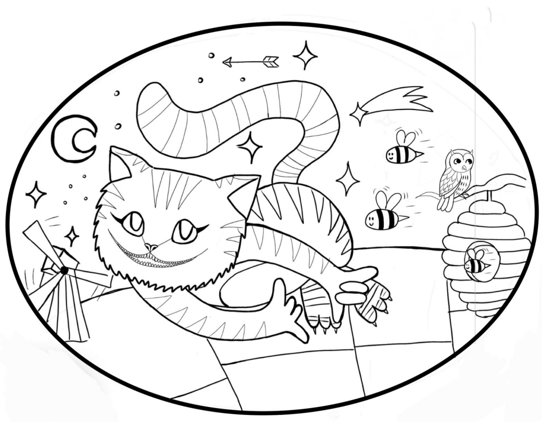
Applications



I. Généralités

Dans toute cette section, E, F, G et H désignent des ensembles.

- **Définition.** Une *application* f de E dans F est « une moulinette » qui à tout élément de E associe un unique élément de F.

  On note $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

  — E est l'*ensemble de départ* de f

  — F est l'*ensemble d'arrivée* de f

  — pour $x \in E$, l'élément $f(x)$ s'appelle l'*image* de x par f ;
  on dit alors que x est *un antécédent* de $f(x)$ par f ;

  — l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$ est appelé le *graphe* de f ;

  — l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in E\}$ est un sous-ensemble de F, appelé l'*image* de f et noté $\operatorname{Im} f$.

- **Notation.** L'ensemble des applications de E dans F se note F^E ou encore $\mathscr{F}(E, F)$.

- **Égalité.** Pour montrer l'égalité de deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$, il s'agit de montrer

  — l'égalité des ensembles de départ, c'est-à-dire $E = E'$,

  — l'égalité des ensembles d'arrivée, c'est-à-dire $F = F'$,

  — l'égalité des expressions, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

- **Réflexe.** La première chose à faire quand on vous donne une application est de s'assurer que celle-ci est *bien définie*, c'est-à-dire que pour $x \in E$, l'élément $f(x)$ a du sens, et d'autre part que $f(x)$ tombe bien dans F.

  Exemple. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.
  L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est bien définie (ce n'est pas évident, WHY ?).

Exemples.

- Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des Pistonnes de PCSI 3.
  On peut considérer l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & [\![1, 12]\!] \\ p & \longmapsto & n^o \textit{ mois de naissance de } p \end{array}$

- La fonction exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$ est une application. Son image est ....

- En voici une autre $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Im} z \end{array}$, son image est ....

  Et encore une autre $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Im} z \end{array}$, son image est ....

- Encore une belle application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$, son image est ....

- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (p, q) & \longmapsto & 2^p(2q+1) \end{array}$ a pour image ....

1 **Définition.** Soit E un ensemble.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée *identité de* E, et notée id_E.

Restriction et Co-restriction

2 **Définition.** Soit $f : E \to F$ une application de E vers F.

— Soit A une partie de E.
La *restriction* de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :

$$\forall x \in A, \quad f_{|A}(x) = f(x).$$

— Soit B une partie de F.
Lorsque l'image de f est incluse dans B, on peut définir la *co-restriction* de f à B, notée $f^{|B}$, qui est l'application de E dans B définie par :

$$\forall x \in E, \quad f^{|B}(x) = f(x).$$

- **Exemple.** Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sa restriction à $[0, \pi]$ est l'application $\cos_{|[0,\pi]} : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$

- **Exemple.** Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$
L'image de cette fonction est incluse dans $\mathbb{R}^*$ (en effet, 0 n'est pas atteint).
On peut donc considérer sa co-resctriction à $\mathbb{R}^*$. On la note $f^{|\mathbb{R}^*}$.
C'est l'application $f^{|\mathbb{R}^*} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$

Prolongement

3 **Définition.** Soit $f : E \to F$ une application de E vers F.
Soit E' un ensemble contenant E, c'est-à-dire $E \subset E'$.
Un *prolongement* de f est **une** application g définie sur E' vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = f(x).$$

- **Exemple.** La fonction inverse est définie sur $E = \mathbb{R}^*$.
Donnez un prolongement de cette fonction à $E' = \mathbb{R}$.

Composition d'applications

4 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$ est appelée *composée des applications* g et f.
On la note $g \circ f$.

- **Exemple.** Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t+1 \end{array}$

  Alors on a :

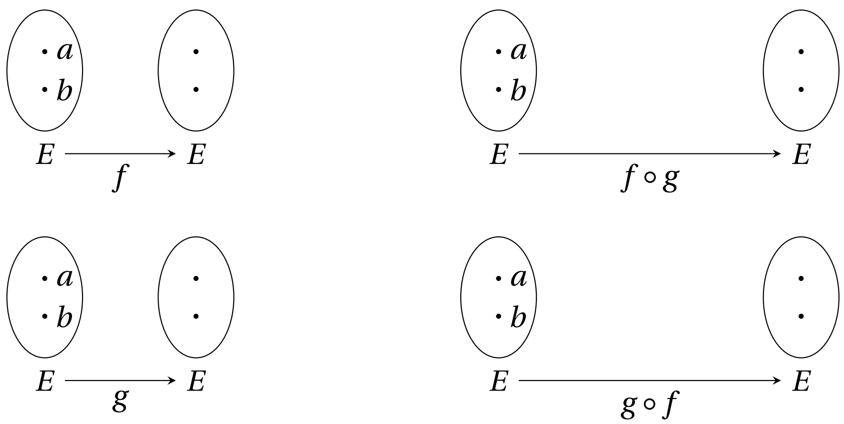
  $$g\circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad f\circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

  Remarquons que $g \circ f \neq f \circ g$, car ...

- **Abus de langage.** En pratique, on peut utiliser la composition des applications dans un cadre plus large que celui de la définition.
  On n'est pas obligé d'imposer à g d'avoir comme ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée de f.
  En revanche, on demande à ce que l'ensemble d'arrivée de f soit *inclus* dans l'ensemble de départ de g.
  Par exemple, considérons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{2+t} \end{array}$
  Alors, on peut très bien considérer la « composée naturelle » :

  $$g\circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array}$$

5 **Attention.** En général, même lorsque les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent, il n'y a aucune raison pour qu'elles soient égales.
solution
Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments distincts a et b.
Construire deux applications $f \in E^E$ et $g \in E^E$ telles que $f \circ g \neq g \circ f$.



6 **Proposition.**

- **Élément neutre de la loi ∘** Pour tout $f \in F^E$, on a $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.
- **Associativité de la loi ∘** Soit $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

II. Image directe, image réciproque

image directe

7 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et A une partie de E.
On appelle *image directe* de A par f, et l'on note $f(A)$, la partie de F définie par :

$$f(A) = \left\{ f(a),\ a \in A \right\}.$$

- **Reformulation pratique.** Un élément de $f(A)$ est un élément qui s'écrit $f(a)$ avec $a \in A$.
- **Exemple.**
  Considérons la fonction carrée que l'on note f. Alors

  $$f\big([-2,1]\big) = \left\{ x^2,\ x \in [-2,1] \right\} = [0,4] \qquad \text{et} \qquad f\big([-1,2]\big) = \left\{ x^2,\ x \in [-1,2] \right\} = [0,4].$$

  On remarque que l'on peut avoir $f(A) = f(A')$ et $A \neq A'$.
- **Cas particulier** $A = \varnothing$**.** L'image directe de l'ensemble vide est l'ensemble vide.
- **Cas particulier** $A = E$**.** L'image directe de l'ensemble de départ, à savoir $f(E)$, est l'image de f.
- **Inclusion.** Si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.
- **L'image directe d'un singleton.** Soit $x \in E$. On a $f\big(\{x\}\big) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

8 **Question.**
Soit A et B deux parties de E et $f \in F^E$. Montrer que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad \text{et} \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

En considérant la fonction carrée, donner un exemple où l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est stricte.

9 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et B une partie de F.
On appelle *image réciproque* de B par f, et l'on note $f^{(-1)}(B)$, la partie de E définie par :

$$f^{(-1)}(B) = \left\{x \in E,\ f(x) \in B\right\}.$$

- **Reformulation pratique.** On a $\quad x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B.$
- **Exemple.** Soit f la fonction carrée. On a:

$$\begin{aligned} f^{(-1)}\big(\{4\}\big) &= \{-2,2\} \\ f^{(-1)}\big([0,4]\big) &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \in [0,4]\right\} = [-2,2] \\ f^{(-1)}\big([-2,4]\big) &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \in [-2,4]\right\} = [-2,2] \\ f^{(-1)}\big([-2,-1]\big) &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \in [-2,-1]\right\} = \varnothing. \end{aligned}$$

  On remarque que l'on peut avoir $f^{(-1)}(B) = f^{(-1)}(B')$ et $B \neq B'$.
- **Cas particulier $B = \varnothing$.** On a $f^{(-1)}(\varnothing) = \varnothing$.
- **Cas particulier $B = F$.** On a $f^{(-1)}(F) = E$.
- **L'image réciproque d'un singleton.** Soit $y \in F$.
  L'ensemble $f^{(-1)}\big(\{y\}\big)$ est l'ensemble des antécédents de y.
  Il peut être vide (si y n'a pas d'antécédent par f), ou bien contenir un ou plusieurs éléments.
- **Inclusion.** Si $B \subset B'$, alors $f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$.

10 **Question.** Soit $f \in F^E$ ainsi que A et B deux parties de F. Montrer que

- $f^{(-1)}(A \cup B) = f^{(-1)}(A) \cup f^{(-1)}(B)$
- $f^{(-1)}(A \cap B) = f^{(-1)}(A) \cap f^{(-1)}(B)$
- $f^{(-1)}(\overline{A}) = \overline{f^{(-1)}(A)}$

image directe et image réciproque

11 **Vrai/Faux.** Soit $f \in F^E$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

(i) Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$

(ii) Si $f(x) \in f(A)$, alors $x \in A$

(iii) Si $x \in f^{(-1)}(B)$, alors $f(x) \in B$

(iv) Si $f(x) \in B$, alors $x \in f^{(-1)}(B)$

12 **Question.** Soit $f \in F^E$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$A \subset f^{(-1)}\big(f(A)\big) \qquad\qquad f\big(f^{(-1)}(B)\big) \subset B$$

III. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Injectivité

13 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application injective*, ou que f est une *injection*, lorsque

— tout élément de F possède *au plus* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *au plus* une solution

ou encore

— $\forall\, x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$

- **Non injectivité.** Une application $f \in F^E$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\,(x, x') \in E^2, \quad x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$$

- **Exemple.** La fonction sinus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas injective car $\sin 0 = \sin \pi$ et $0 \neq \pi$.

14 **Proposition.**
Soit D une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors elle est injective.

Surjectivité

15 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application surjective*, ou que f est une *surjection*, lorsque

— tout élément de F possède *au moins* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *au moins* une solution

ou encore

— $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$

- **Non surjectivité.** Une application $f \in F^E$ n'est pas surjective si et seulement si

$$\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ f(x) \neq y$$

autrement dit, lorsqu'il existe un $y \in F$ qui n'est pas atteint par f.

- **Exemple.** La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective car 3 n'est pas atteint.

16 **Question.** Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

17 solution **Question.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y,\ xy) \end{array}$ L'application f est-elle injective ? surjective ?

18 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application bijective*, ou que f est une *bijection*, lorsque

— tout élément de F possède *exactement* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *exactement* une solution

ou encore

— $\forall\, y \in F, \quad \exists!\, x \in E, \quad y = f(x)$

- **Exemple.** Aucune des trois applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

n'est bijective.

Mais l'application $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.

- **Rédaction à maîtriser.**
Montrons que $f : E \to F$ est bijective.
Pour cela, fixons un élément de l'ensemble d'arrivée $y \in F$.
Montrons qu'il existe un unique élément de l'ensemble de départ $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
On raisonne par analyse-synthèse.
$\vdots$
Donc f est bijective.

Explication.
L'analyse montre que si un tel élément x existe, alors nécessairement il vaut ...
L'analyse montre donc l'injectivité de f.
La synthèse montre que ce candidat fonctionne.
La synthèse montre donc la surjectivité de f.

- **Remarque.** Parfois il est plus pratique de traiter la partie unicité/injectivité « en mode x, x' », c'est-à-dire en prenant $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et en montrant que $x = x'$.

19 **Exemple.** Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective.

20 solution **Question.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$

Vérifier que f est bien définie. Puis montrer que f est bijective.

IV. Propriétés

Propriétés liées à la composition

21 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(iii) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Remarques sur ces trois points.

- Le point (i) se retient en disant

  La composée de deux injections est une injection.

- On pourrait retenir le point (ii) sous la forme

  La composée de deux surjections est une surjection.

  Mais cette phrase est dangereuse à cause de l'exemple suivant.
  Les applications
  $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \quad \text{sont surjectives.}$$
  Mais leur « composée naturelle » $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array}$ n'est pas surjective.
  Bref, si l'on veut résumer le point (ii) en français, il faudrait dire :

  La composée de deux surjections, dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde, est une surjection.

- Idem pour le point (iii).

  La composée de deux bijections, dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde, est une bijection.

  Méditer l'exemple suivant. Les applications suivantes:
  $$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \quad \text{sont bijectives.}$$
  Mais leur « composée naturelle » $g \circ f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array}$ n'est pas bijective.

22 **Exercice.** Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

(i) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

(iii) Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

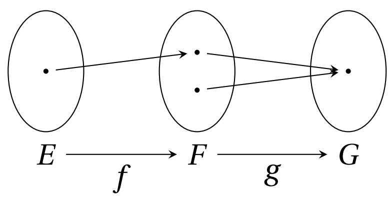
- **Remarque très utile.** Soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$. On suppose que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Que peut-on dire d'intelligent sur f et g en termes de (inj/surj/bij)-ectivité ?

23 **Attention.**

— Si $g \circ f$ est injective, alors g n'est pas forcément injective.
Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$

— Si $g \circ f$ est surjective, alors f n'est pas forcément surjective.
Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - 1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$

Autre exemple (générique)



Ici, $g \circ f$ est …
et pourtant, …

24 **Définition.** Soit $f \in F^E$ une application **bijective**.
L'application de F dans E qui, à tout $y \in F$, associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$, s'appelle *l'application réciproque* de f et se note f^{-1}.

- **Reformulation.** Lorsque f est bijective, l'application réciproque f^{-1} est donc définie par :

$$f^{-1}: \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } t \in E \text{ tel que } f(t) = y \end{array}$$

- **Attention.** Il faut s'empêcher de parler de f^{-1} tant que l'on n'a pas justifié la bijectivité de f.
Sur une copie, on pourra écrire :
Comme f est bijective, on peut considérer f^{-1}.

Exemples.

- L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array}$ est bijective.

En effet, on a montré (cf. chap. 1) par analyse-synthèse que $\forall\, y \in [1, +\infty[,\ \exists!\, t \in \mathbb{R}^-,\ f(t) = y$.

Son application réciproque est ...

- L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,\ x-y) \end{array}$ est bijective.

En effet, on a montré par analyse-synthèse que ....

Son application réciproque est ...

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.
L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est bijective.

En effet, on a montré par analyse-synthèse que ....

Son application réciproque est ...

25 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ bijective.
Alors

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$$

26 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Alors les applications f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

- **Reformulation extrêmement importante.**
On a donc un « nouveau » moyen pour montrer que f est bijective et donner f^{-1}.
Si l'on exhibe une application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors on peut affirmer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

- **Attention.** Si l'on a seulement une des deux égalités…
On peut très bien avoir l'une des égalités $f \circ g = \mathrm{id}_F$ ou $g \circ f = \mathrm{id}_E$ sans que f et g soient bijectives.
Prenons l'exemple où $f = \exp$ est la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \ln t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$ vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
En effet, on a $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(f(x)) = g(\exp x) = \ln(\exp x) = x$.
On a donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, *mais pourtant* la fonction f n'est pas bijective puisque son image, $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas égale à $\mathbb{R}$.
Cela n'a rien de contradictoire avec la proposition précédente qui réclame les deux égalités $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Exemples.

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ t & \longmapsto & t^2 + 1 \end{array}$ est bijective.

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}$ est bijective.

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.
L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az + b}{cz + d} \end{array}$ est bijective.

27 **Proposition.** Soit $f \in F^E$.
Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et l'application réciproque de f^{-1} est f, c'est-à-dire ...

28 **Proposition (Chaussettes et chaussures).** Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

29 **Question.**
Soit $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective.
Montrer, sans se fatiguer, uniquement à l'aide des propositions précédentes, que φ et ψ sont bijectives.

Involution

30 **Définition.** Soit $f : E \to E$.
On dit que f est une application *involutive*, ou que f est une *involution*, lorsque $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

- **Remarque importante.** Une application involutive est bijective et son application réciproque est elle-même.

Exemples.

- La fonction « $-$ identité », à savoir l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$ est involutive, donc bijective.
- La fonction inverse, à savoir l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est involutive, donc bijective.
- L'application de passage au complémentaire, $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}$ est involutive, donc bijective.
- La conjugaison complexe, à savoir $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est une involution, donc une bijection.

V. Pour finir

Application réciproque versus image réciproque

31 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ *bijective* et $B \in \mathscr{P}(F)$.
L'image directe de B par l'application f^{-1} et l'image réciproque de B par f sont égales.
Autrement dit,

$$f^{-1}(B) \;=\; f^{(-1)}(B)$$

Indicatrice

32 **Proposition.** Soit $A \subset E$.
La *fonction indicatrice* de A est la fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie par $\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$

- **Quelques égalités.** Si A et B sont deux parties de E, alors on a :
  — $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
  — pour la réunion $\quad \mathbb{1}_{A\cup B} \;=\; \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \;-\; \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
  — pour le complémentaire $\quad \mathbb{1}_{\overline{A}} \;=\; \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A$.

- **Remarque.** Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on peut montrer l'égalité de leurs fonctions indicatrices.

33 solution **Question.** Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

Famille

34 **Définition.** Soit I un ensemble quelconque.
Une *famille d'éléments* de E indexée par I est une application de I dans E.

- Une famille d'éléments de E indexée par I est donc un élément de E^I, mais l'utilisation du terme *famille* sous-entend que l'on utilise la notation *indexée* $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de la notation *fonctionnelle* $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$
- Une famille d'éléments de E *indexée par* $\mathbb{N}$ est appelée *suite* d'éléments de E.
- Une famille est dite *finie* lorsque l'ensemble I est fini.
  - — Lorsque I est de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$, on prend le plus souvent $I = [\![1, p]\!]$ et une telle famille est aussi appelée p*-liste* ou p*-uplet*.
  - — La famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ se note alors couramment $(x_1, \dots, x_p)$; on a une identification naturelle entre E^I, l'ensemble des p-listes d'éléments de E, et le produit cartésien E^p.
- **Vocabulaire.** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble I, et soit J une partie de I :
  - — la famille $(x_i)_{i\in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i\in I}$;
  - — la famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée *sur-famille* de $(x_i)_{i\in J}$.
- **Exemple.** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut définir $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array}$

  La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille de fonctions (d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) indexée par $\mathbb{R}$.
  La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{Z}}$ en est une sous-famille.

Recouvrements, recouvrements disjoints, partitions

35 **Définition.** Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

- — On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement* de E lorsque $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.
- — On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement disjoint* de E lorsque $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E constitué de parties deux à deux disjointes.

  On écrit alors $\bigsqcup_{i\in I} A_i = E$ pour signifier que :
  - on a l'égalité $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
  - avec la précision $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
- — On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E lorsque $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E constitué de parties non vides.

36 solution **Question.** Soit $f : E \to I$ une application *surjective*.
Pour tout $i \in I$, on pose $A_i = f^{(-1)}(\{i\})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

Applications

preuve et éléments de correction

5

Soit a, b deux éléments distincts de E.
Considérons les applications f et g de E vers E, définies par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = a \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ g(x) = b.$$

On a $(g \circ f)(a) = b$ et $(f \circ g)(a) = a$, ce qui prouve $g \circ f \neq f \circ g$.

17

— L'application f n'est pas injective car $f(1,2) = f(2,1)$ alors que $(1,2) \neq (2,1)$.

— L'application f n'est pas surjective car le couple $(0,1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $(x+y, xy) = (0,1)$, alors on a $y = -x$, donc $xy = -x^2$, puis $x^2 = -1$, ce qui n'est pas possible.

20

• Montrons que f est bien définie.

— Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$, la fraction $\dfrac{az+b}{cz+d}$ a du sens.

— Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$. Montrons que $\dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \setminus \{\dfrac{a}{c}\}$, c'est-à-dire montrons que $\dfrac{az+b}{cz+d} \neq \dfrac{a}{c}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$.
Alors on a $c(az+b) = a(cz+d)$, d'où $bc = ad$, ce qui contredit l'hypothèse $ad - bc \neq 0$.

• Montrons que f est bijective.
Pour cela, montrons que $\forall \omega \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\},\ \exists!\, z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\},\ f(z) = \omega$.
Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Analyse. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ tel que $f(z) = \omega$.

Alors $\dfrac{az+b}{cz+d} = \omega$.
En effectuant un petit produit en croix et en isolant z, on tombe sur $(-c\omega + a)z \ = \ (d\omega - b)$.
Comme $\omega \neq \dfrac{a}{c}$, on a $-c\omega + a \neq 0$, d'où $z = \dfrac{d\omega - b}{-c\omega + a}$

Synthèse. On pose $z = \dfrac{d\omega - b}{-c\omega + a}$.

⋆ Montrons que $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $z = \frac{-d}{c}$.
Alors $\dfrac{d\omega - b}{-c\omega + a} = \dfrac{-d}{c}$.
On en déduit $c(d\omega - b) = -d(-c\omega + a)$.
D'où $-bc = -ad$, puis $ad - bc = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

⋆ Montrons que $f(z) = \omega$.
Le plus simple est de « remonter les calculs » précédents.
Allons-y.
Par définition, on a $z = \dfrac{d\omega - b}{-c\omega + a}$.
D'où $(-c\omega + a)z \ = \ (d\omega - b)$.
Puis, en isolant ω, on a $az + b = \omega(cz + d)$.
Comme $z \neq \dfrac{-d}{c}$, on a $cz + d \neq 0$, d'où $\dfrac{az+b}{cz+d} = \omega$, c'est-à-dire $f(z) = \omega$.

33

Posons $g: \begin{array}{ccc} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \left\{x \in E \mid \varphi(x) = 1\right\} \end{array}$

Cette application est bien définie (il n'y a rien à montrer).

On a $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0,1\}^E}$ (il y a deux calculs à faire).

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

36

Attention à ne **pas** dire que $f(A_i) = \{i\}$.

En revanche, on peut reformuler A_i. On a $A_i = \left\{x \in E \mid f(x) = i\right\}$.

Il y a trois choses à montrer $\begin{cases} \text{les } A_i \text{ recouvrent } E\text{, c'est-à-dire} \quad E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \\ \text{les } A_i \text{ sont 2 à 2 disjoints, c'est-à-dire} \quad \forall\, i, j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \\ \text{les } A_i \text{ sont non vides, c'est-à-dire} \quad \forall\, i \in I,\ A_i \neq \emptyset \end{cases}$

— Montrons l'inclusion $E \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, l'autre inclusion est automatique.

Soit $x \in E$.

Montrons que $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, c'est-à-dire montrons $\exists\, i \in I,\ x \in A_i$.

Posons $i = f(x)$.

Alors i est bien dans I (car f est à valeurs dans I).

De plus, par définition de A_i, on a bien $x \in A_i$.

— Montrons $\forall\, i, j \in I, \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies i = j$

Soit $i, j \in I$.

Supposons $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

On peut donc trouver $x \in A_i \cap A_j$.

Par définition de A_k, on a donc $f(x) = i$ et $f(x) = j$.

D'où $i = j$.

— Soit $i \in I$. Montrons que A_i est non vide.

Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = i$.

Ainsi, $x \in A_i$.