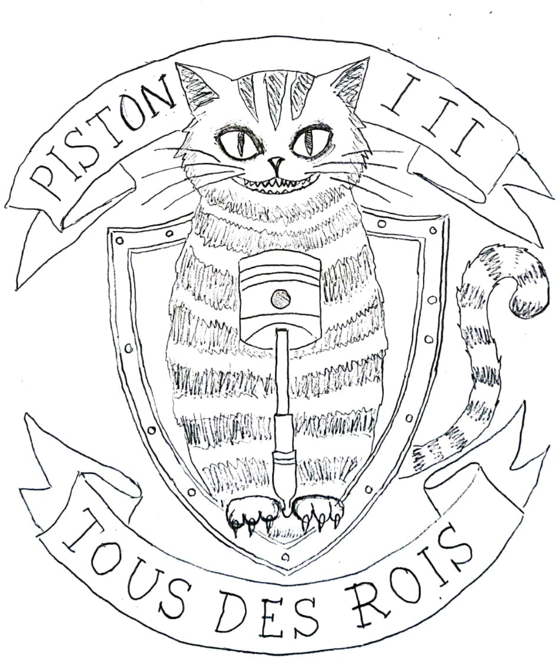
Fonctions usuelles

exercices



Faire ses gammes

101 **Dérivons**

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$

(ii) $x \mapsto x - a\sqrt{x}$

(iii) $x \mapsto \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

(iv) $x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$

(v) $x \mapsto (ax+b)^x$

(vi) $x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin(x)}$

(vii) $x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$

(viii) $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x^2 - 1)$

(ix) $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

(x) $x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$

102 **Des équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(i) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$

(ii) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

(iii) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

(iv) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$

103 **Étude de fonctions**

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

(i) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

(ii) $x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$

(iii) $x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$

(iv) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

(v) $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$

(vi) $x \longmapsto x \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$

(vii) $x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$

Fonctions exponentielles et puissances

104 **Écriture d'un entier en base 2**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i \quad \text{avec} \quad a_{p-1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![0, p-2]\!],\ a_i \in \{0,1\}.$$

Montrer que $p = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

105 **Des suites**

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n,p) non nuls tels que $n^p = p^n$.
2. Déterminer les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n \geqslant n^2$.

106 **Max !**

Déterminer, s'il existe, le maximum de $\left\{ \sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

107 Exponentielle et Taylor

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

108 Encadrement de e

Montrer que $\qquad \forall n \geqslant 2, \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}.$

109 Du x en haut et en bas

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
   On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I.
   Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

110 Une inégalité

Montrer que $\qquad \forall x \in \left]0,1\right[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}.$

Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

111 Une inégalité (délicate ?)

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t$$

Fonctions trigonométriques circulaires

112 Inégalités (trigonométriques)

Montrer et illustrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$

(ii) $\forall x \in [-1,1],\ |\operatorname{Arcsin} x| \geqslant |x|$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1-\cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$

(iv) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ |\tan x| \geqslant |x|$

113 Graphe

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.
Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est périodique.
Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet l'origine comme centre de symétrie. Tracer $\mathcal{C}_f$.

114 Avec Arctan

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
   On pourra calculer la tangente de cette expression.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)\right)$.

115 Cosinus et Arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
En déduire une formule analogue pour $\sin(\operatorname{Arctan} x)$.

116 Avec Arctan

1. Montrer que $\quad \forall t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\},\ \dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
2. Simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

117 Des identités

Montrer les égalités suivantes :

(i) $\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos} x$.

118 Simplification d'une expression avec Arcsin

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.
Soit $x \in \mathcal{D}_f = \dots$.
Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \\ 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \\ \pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \dots \end{cases}$$

119 Équations

Résoudre les équations

(i) $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$

(iii) $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) = \dfrac{\pi}{2}$

(iv) $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Divertissement !

120 Formule d'Euler et Formule de Machin

(i) Montrer la relation $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$ *(formule due à Euler).*

(ii) Montrer la *formule de Machin* $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.
(Cette formule permit à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales exactes de π).

121 Encore une formule

Établir l'égalité $\dfrac{\pi}{4} = 5\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{79}$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

122 Formules d'addition des fonctions hyperboliques

Soit x et y deux réels. Montrer les formules suivantes :

(i) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$

(ii) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$

(iii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$

(iv) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$

123 Une espèce de formule de Moivre

Rappeler la formule de Moivre chez les nombres complexes.
Montrer $\quad \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x)^p = \operatorname{ch}(px) + \operatorname{sh}(px)$.

124 Duplication

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
En utilisant la formule de duplication du sinus hyperbolique, simplifier $2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

125 Un exo de khôlle, pas trop méchant !

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a\operatorname{ch}x + b\operatorname{sh}x = 0$.

126 Un système non linéaire

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Déterminer une condition sur a et b pour que $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$ admette au moins une solution.

127 Sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Simplifier $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx+y)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx+y)$.

128 Fonctions hyperboliques réciproques

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $y = \operatorname{sh}x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?
2. Même question avec la fonction ch.

Limites

129 Avec du log et de l'exponentielle

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \ln(x) - e^x$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{\exp(x)}}$

130 Avec des fonctions puissances

Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{1/x}$

Mini DM

131 Une équation différentielle (le retour)

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer f'.
3. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$.
4. On pose $g : t \mapsto f\big(\operatorname{sh}(t)\big)$. Donner une expression simple de g.
   Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 4(\operatorname{ch}^2 t) f''(\operatorname{sh}(t)) \ + \ 4\operatorname{sh}(t) f'(\operatorname{sh}(t)) \ - \ f(\operatorname{sh}(t)) \ = \ 0.$$
5. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathcal{D}, \quad 4(x^2+1)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$$

132 La fonction tangente hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique* et on note th la fonction $\dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

1. Étudier la fonction th et tracer son graphe.
2. Montrer que $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ et $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$.
3. Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 1,\ \left(\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right)^n = \dfrac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$.
4. Montrer que th est injective sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans son image. Déterminer une expression de sa réciproque, notée Argth.

Fonctions usuelles

corrigés

(i) $x \longmapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

$\mathcal{D}éri = \mathbb{R}^*$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{a}{x^2}}\right) = (-a)(-2)\, x^{-3} e^{-\frac{a}{x^2}}$$
$$= \frac{2a}{x^3} e^{-\frac{a}{x^2}}$$

(ii) $x \longmapsto x - a\sqrt{x}$

$\mathcal{D}éf = \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{D}éri =]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx}\left(x - a\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

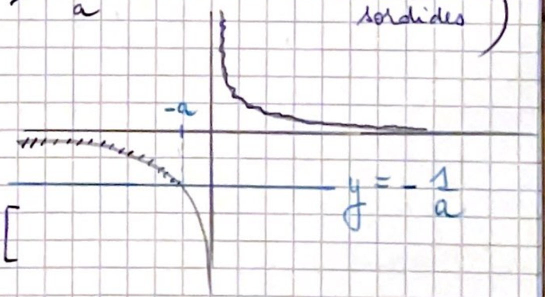
(iii) $x \longmapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right]$

• $\mathcal{D}éf$?

On résout l'inéquation $1 + \frac{a}{x} > 0$ (le + efficacem^t possible et au brouillon si vous faites des calculs sordides)

Cela équivaut à chercher les x tq $\frac{1}{x} > -\frac{1}{a}$
(rappel: a est positif)

Petit dessin efficace :



BILAN :

$\mathcal{D}éf =]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$

• $\mathcal{D}éri$ = idem que $\mathcal{D}éf$

• $$\frac{d}{dx}\left(\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x\right) = \left[1 . \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x . \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}}\right] \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right]$$
$$= \left[\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{-a}{x+a}\right]\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

(iv) $x \longmapsto \sqrt{1+\cos^2 x}$

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos^2 x \geq 1$

- A fortiori,
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+\cos^2 x \geq 0$
  D'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

- A fortiori
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos^2 x > 0$
  D'où $\mathcal{D} éri = \mathbb{R}$.

- $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right) = \frac{2(-\sin x)(\cos x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

(v) $x \longmapsto (ax+b)^x = \exp\left[x \ln(ax+b)\right]$

- $\mathcal{D} = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$
- $\mathcal{D}éri$ = idem
- $$\frac{d}{dx}\left((ax+b)^x\right) = \left[\ln(ax+b) + x\frac{a}{ax+b}\right](ax+b)^x$$

(vi) $x \longmapsto \dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin x}$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 [\pi]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]0+k\pi, \pi+k\pi\right[$
- $\mathcal{D}éri$ idem
- $$\frac{d}{dx}(\ldots) = \frac{-(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x - \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{(\sin x)^2}$$

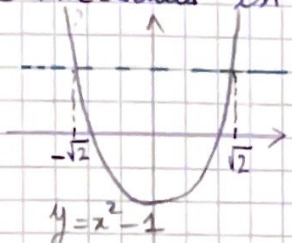
(vii) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}éri$ idem
- $$\frac{d}{dx}(\ldots) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

(viii) $x \longmapsto \text{Arcsin}(x^2-1)$

La fonction Arcsinus est défini sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$

On a :



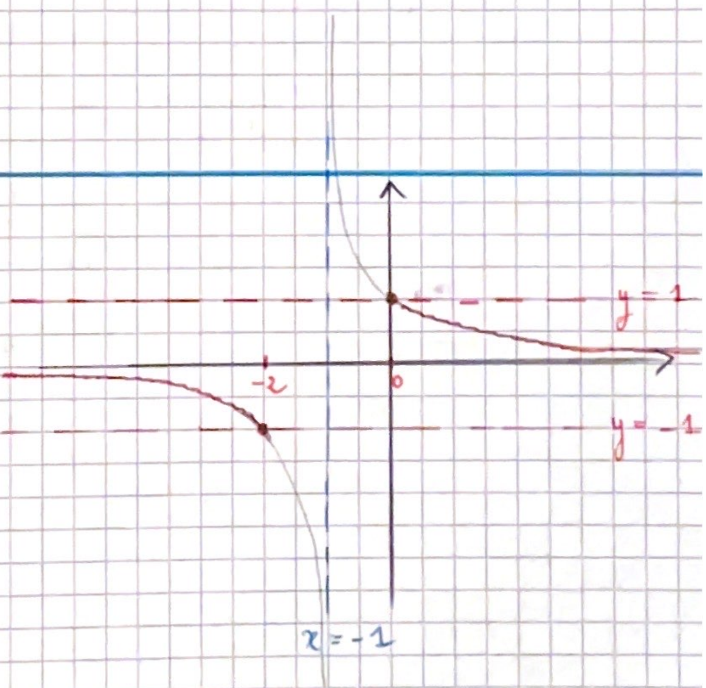
D'où $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et $\mathcal{D}éri =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$$

$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

(IX) $x \longmapsto \text{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right)$



On a $\mathcal{D} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

$\mathcal{D}éri =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{-\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x)^2-1}}{|1+x|}}$$

$$= \frac{|1+x|}{(1+x)^2\sqrt{x(x+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}\,|1+x|}$$ en mult. en haut et en bas par $|1+x|$ et en utilisant le fait que $|1+x|^2 = (1+x)^2$

(x) $\quad x \longmapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0\ [2\pi]\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$$

$\mathcal{D}$éri = idem

$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, 2(k+1)\pi[$$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{d}{dx}\left(\cos^3 x \cdot (1-\cos x)^{-2} \right)$$

$$= 3(-\sin x)(\cos^2 x)(1-\cos x)^{-2} + \cos^3 x \cdot (-2)(\sin x)(1-\cos x)^{-3}$$

$$= -\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (1-\cos x)^{-3} \left[3(1-\cos x) + 2\cos x \right]$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos^2 x}{(1-\cos x)^3} \left[3 - \cos x \right]$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x - 3)}{(1-\cos x)^3}$$

(i) Soit $x \in \mathcal{D} =]0, +\infty[$

On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} \iff \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3x}\right)$$

$$\iff \frac{x+3}{2} = \sqrt{3x}$$

$$\iff \frac{(x+3)^2}{4} = 3x$$

$$\iff (x+3)^2 - 12x = 0$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\iff (x-3)^2 = 0$$

$$\iff x = 3.$$

(i) • Ensemble de définition $\mathcal{D}$ de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) \text{ existe} \\ \ln x \quad \text{existe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x+3}{2} > 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff x \in]0, +\infty[$$

Bilan :

$\mathcal{D} =]0, +\infty[$

(ii) • $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

• Soit $x \in \mathcal{D}$

On a les équivalences suivantes.

$$3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \iff 3^{2x}\left(1+3^{-1}\right) = 2^{x}\left(2^{\frac{7}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \frac{2^{1/2}\left(2^{3}+1\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \frac{9\times 3}{4\times 2^{-1/2}} = \frac{9\sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$$

$$\iff \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$$

WHY

$$\iff x = \frac{3}{2}$$

⚠ On vérifie que $\frac{3}{2} \in \mathcal{D}$

cours // à savoir

Justification du WHY

Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, $x, x' \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence $a^{x} = a^{x'} \iff x = x'$

En effet, la fonction $x \longmapsto a^{x} = \exp[x \ln a]$ est injective car strictement monotone

BILAN $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

(iii) • Recherche du domaine de définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

• $\sqrt{x}^{x} = \exp[x \ln\sqrt{x}]$ existe $\iff \sqrt{x} > 0$

$\iff x \in]0, +\infty[$

• $x^{\sqrt{x}} = \exp[\sqrt{x} \ln x]$ existe $\iff x \geqslant 0$ et $x > 0$

$\iff x \in]0, +\infty[$

Ainsi $\mathcal{D} =]0, +\infty[\cap]0, +\infty[$

$\mathcal{D} =]0, +\infty[$

• Résolution

Soit $x \in \mathcal{D}$.

On a les équivalences :

$\sqrt{x}^{x} = x^{\sqrt{x}} \iff \exp[x \ln\sqrt{x}] = \exp[\sqrt{x} \ln x]$

$\iff x \ln\sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x$

$\iff \frac{1}{2} x \ln x = \sqrt{x} \ln x$

$\iff \sqrt{x} \ln x \left[\frac{1}{2}\sqrt{x} - 1\right] = 0$

$\iff \sqrt{x} = 0$ ou $\ln x = 0$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$

⚠ Vérifier que les potentielles solutions appartiennent à $\mathcal{D}$.

On a $0 \notin \mathcal{D}$; $1 \in \mathcal{D}$; $4 \in \mathcal{D}$.

BILAN $\boxed{\mathcal{S} = \{1 ; 4\}}$

(iv) • Recherche de l'ens. de définition $\mathcal{D}$ de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} \ln|2x+1| \text{ existe} \\ \ln|x+3| \text{ existe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ \text{et} \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff x \neq -\frac{1}{2} \text{ et } x \neq -3.$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-3 ; -1/2\right\}$$

• Résolution.

Soit $x \in \mathcal{D}$. On a les équivalences.

$$\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 \iff \ln|(2x+1)(x+3)| < \ln 3$$

$$\iff |(2x+1)(x+3)| < 3.$$

$$\iff \begin{cases} (2x+1)(x+3) < 3 \\ \text{et} \\ (2x+1)(x+3) > -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 + 7x < 0 \\ \text{et} \\ 2x^2 + 7x + 6 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left]-7/2, 0\right[\\ \text{et} \\ x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-3/2, +\infty\right[\end{cases}$$

$$\iff x \in \left]-7/2 ; -2\right[\cup \left]-3/2, 0\right[$$

⚠ Ne pas oublier $x \in \mathcal{D}$

BILAN : $$\boxed{\mathcal{S} = \left]-7/2, -3\right[\cup \left]-3, -2\right[\cup \left]-3/2, -1/2\right[\cup \left]-1/2, 0\right[}$$

(i) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

f est impaire

f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2}$$

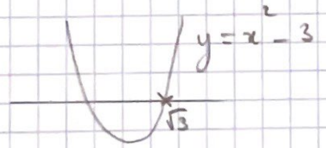
$$= \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Limites

Par imparité de f, il suffit de justifier les limites en $\sqrt{3}^-$; $\sqrt{3}^+$; $+\infty$.

$\boxed{\text{En } \sqrt{3}}$

On a 

donc $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} (x^2-3) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} (x^2-3) = 0^+$

D'où $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} \dfrac{1}{x^2-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \dfrac{1}{x^2-3} = +\infty$

Puis $\lim\limits_{\sqrt{3}^-} f = -\infty \qquad \lim\limits_{\sqrt{3}^+} f = +\infty$

$\boxed{\text{En } +\infty}$ On a $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3} = \dfrac{x^3}{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{x}{1-\frac{3}{x^2}} \longrightarrow +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{x^2} = 1$

Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

__Bonus__ Montrons que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1-\frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

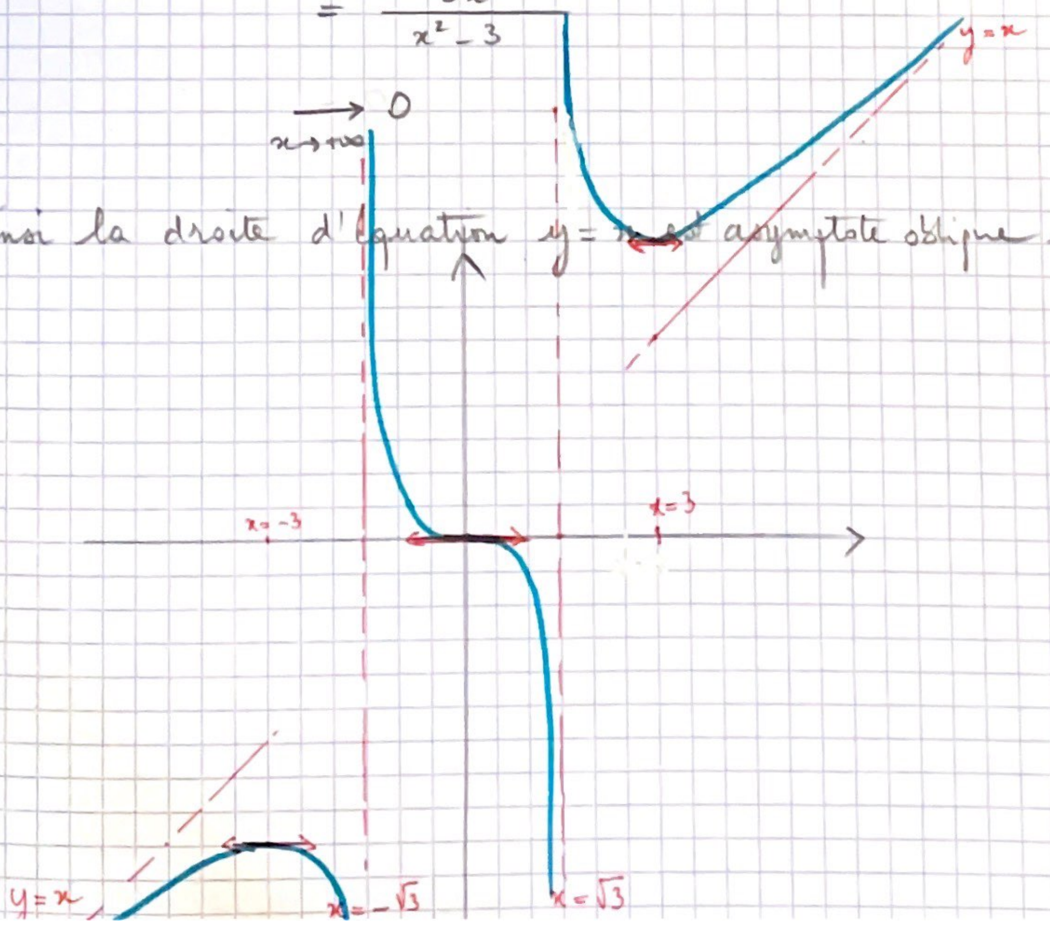
Puis $f(x) - x = \dfrac{x^3}{x^2-3} - x$

$= \dfrac{x^3 - x(x^2-3)}{x^2-3}$

$= \dfrac{3x}{x^2-3}$

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$



(ii) $f : x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$

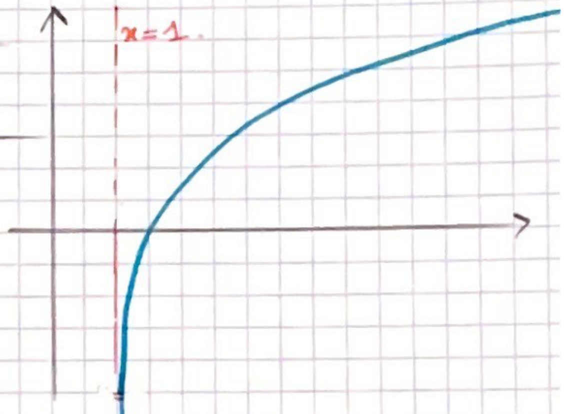
$\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Limite en 1^+

- On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x+1) = \ln 2$

Par somme $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

iii) $f : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

f est paire.

Sur $]1, +\infty[$, f est égale à la fonction précédente (point i

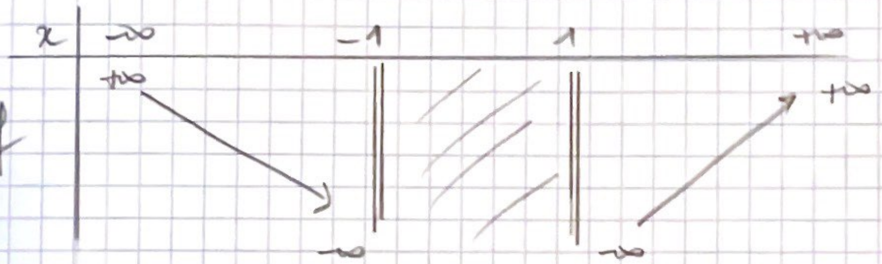
En effet :

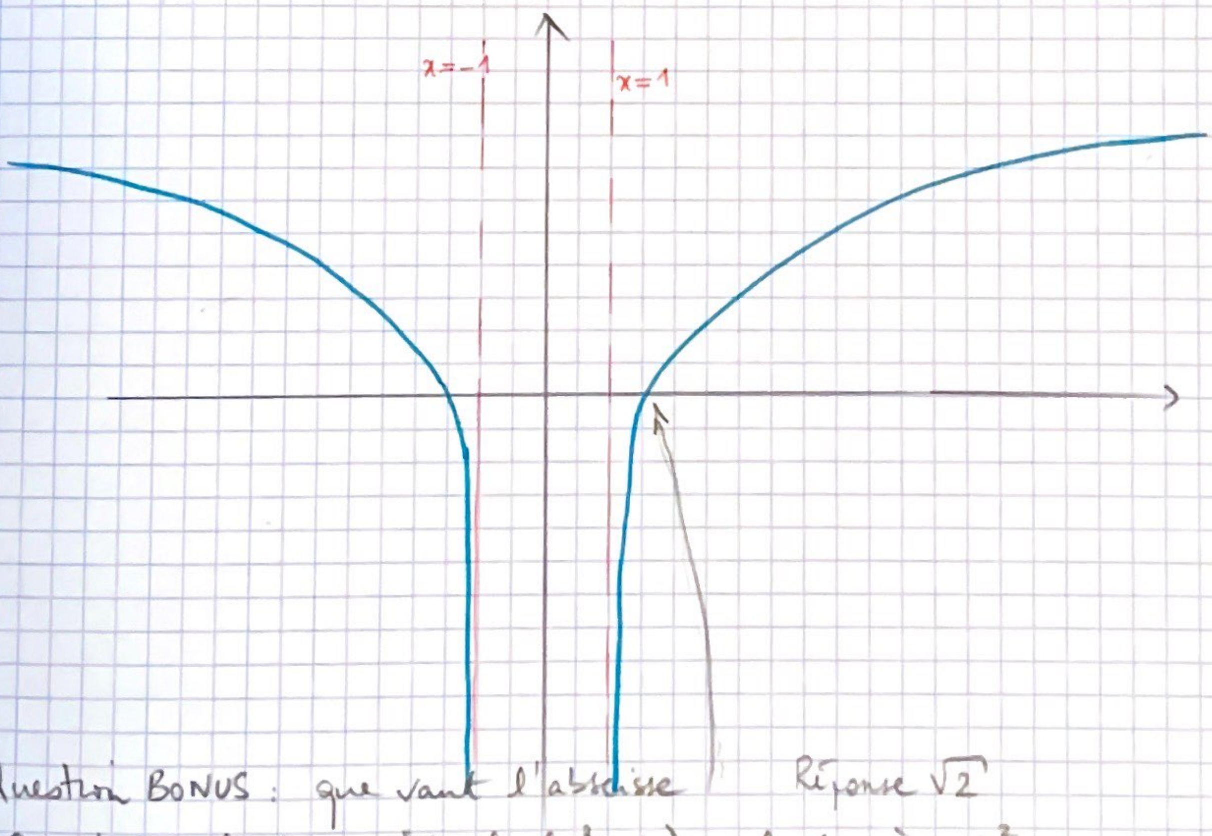
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad x^2 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\geq 0}\underbrace{(x+1)}_{\geq 0}$$

D'où

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \ln(x^2 - 1) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

D'après l'étude précédente, on a donc :





Question BONUS : que vaut l'abscisse Réponse $\sqrt{2}$

On résout $f(x) = 0$ càd $\ln(x^2 - 1) = \ln 1$ càd $x^2 - 1 = 1$

càd $x^2 = 2$.

iv) $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

- Recherche de $\mathcal{D}_f$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a l'équivalence :

  $$x \in \mathcal{D}_f \iff \frac{\ln|x|}{x} \text{ existe et } \frac{\ln|x|}{x} \geqslant 0$$

  $$\iff x \neq 0 \text{ et } x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Bilan $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$

- f est dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

  En effet :

  - $x \longmapsto \dfrac{\ln|x|}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$

  - $t \longmapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

  Par composition, f est dérivable sur $\mathcal{D}'$.

On a

$$\forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln|x|}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}}$$

$$= \frac{1 - \ln|x|}{2x^2} \times \sqrt{\frac{x}{\ln|x|}}$$

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\Vert$		0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	

Limite en 0^-

On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par produit $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\ln|x|}{x} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

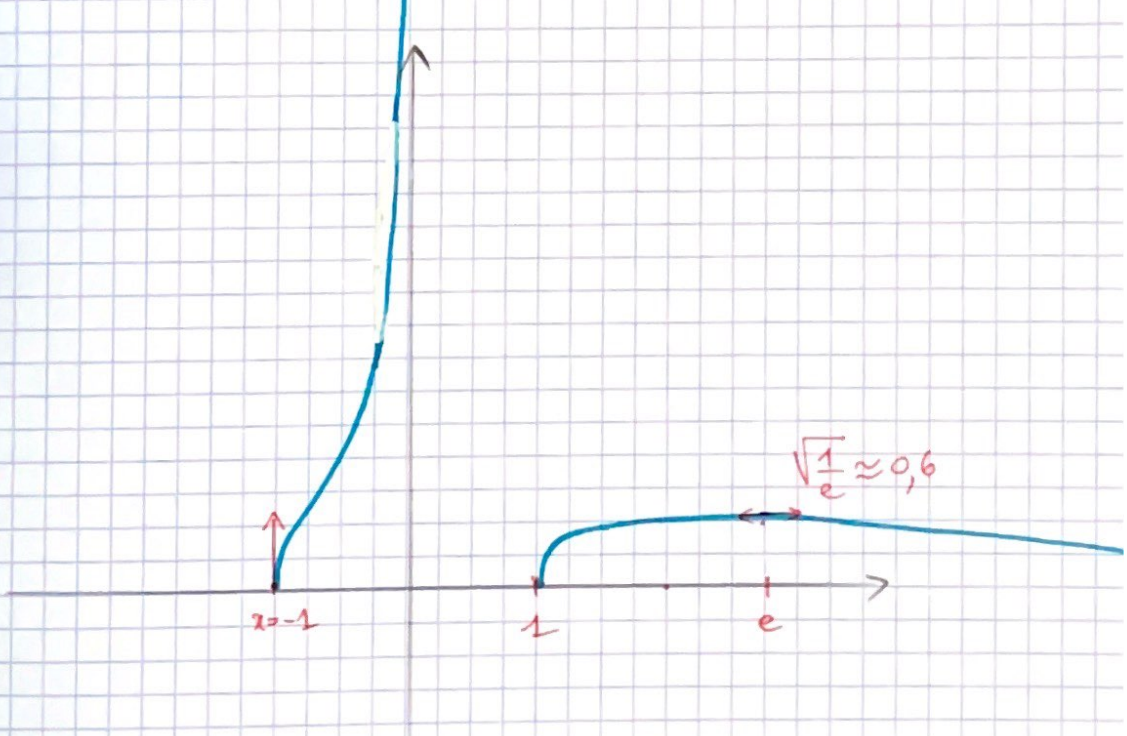
Limite en $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$ par croiss. comparée

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Bonus On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$

On verra + tard que cela témoigne d'une tangente verticale en -1.



(V) $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$

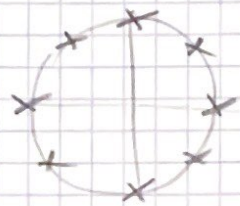
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a :

  $$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(2x) \text{ existe} \\ \tan x \text{ existe et non nul.} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \\ x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \neq 0 [\pi] \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} [\pi/2] \\ x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \neq 0 [\pi] \end{cases}$$



- f est paire et π-périodique

  On peut restreindre l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}] \cap \mathcal{D}_f$.

  où $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right[$

  $$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\frac{\pi}{4}; (2k+1)\frac{\pi}{4}\right[\cup \left](2k+1)\frac{\pi}{4}; (2k+2)\frac{\pi}{4}\right[$$

On peut donc restreindre l'étude de f à

$$\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

- f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

  Utilisons l'expression suivante de f :

  $$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{2}{1 - \tan^2 x}$$

  obtenue avec $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \ f'(x) = \frac{4\tan x\,(1 + \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)^2}$$

D'où le tableau sur $]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$
f	$\|$	$2 \nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow 0$	$\|$

En 0

On a $f(x) = 2 \dfrac{\tan(2x)}{2x} \times \dfrac{1}{\frac{\tan x}{x}}$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x)}{2x} = 1$

Par quotient, puis produit, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

En $\pi/4$

- On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} 2x = \frac{\pi}{2}^-$ d'où $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \tan(2x) = +\infty$

  et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \tan x = 1$

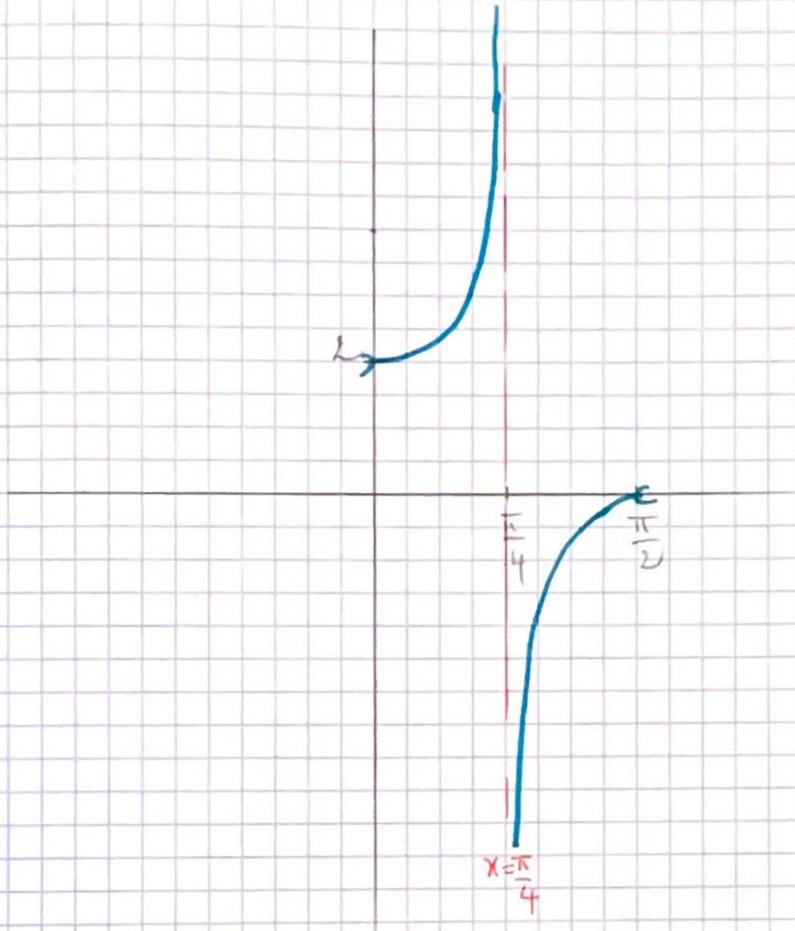
  Par quotient $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty$

- Etude analogue en $\frac{\pi}{4}^+$

En $\frac{\pi}{2}^-$ On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(2x) = 0$ (WHY)

On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\tan x} = 0$

$\Bigg\}$ par produit $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$



Le graphe de f sur $]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ que l'on prolonge par symétrie axiale d'axe (Oy) à $[-\frac{\pi}{2}, 0] \cap \mathcal{D}_f$

Puis par translation, on prolonge à $\mathcal{D}_f$.

(VI) $f : x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est paire donc on peut se restreindre à $]0,+\infty[$ pour l'étude

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 1 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

Pour étudier le signe de f', on étudie les variations de f'

f' est dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} - \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-(x^2+1) + x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x^2+1)^2}$$

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	
f'	‖	$\searrow$	0
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖	$\nearrow$	

Limite en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to +\infty} \mathrm{Arctan}\, t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Limite en $+\infty$

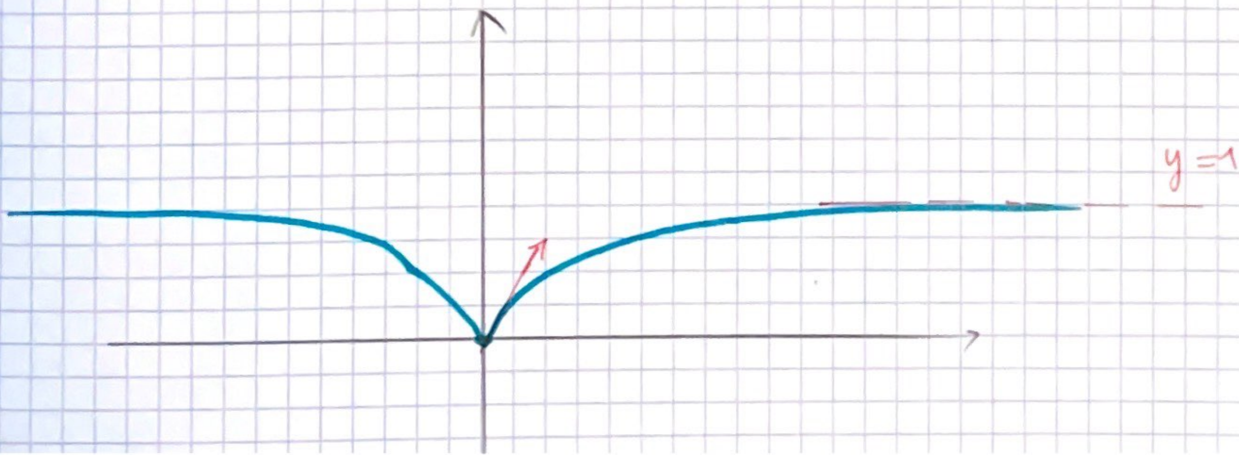
On a $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t} = 1 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Bonus pour tracer le graphe au voisinage de 0.

On peut montrer (faites-le) que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{\pi}{2}$

On apprendra + tard que cela implique la présence d'une tangente en 0 de coeff dir $\frac{\pi}{2}$.



(vii) $f : x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- f est impaire
- f est (2π)-périodique
- On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3\cos(3x) + 3\cos x$$
$$= 3\left[\cos(3x) + \cos x\right]$$
$$= 6\cos(2x)\cos x \quad \text{avec le rappel}$$

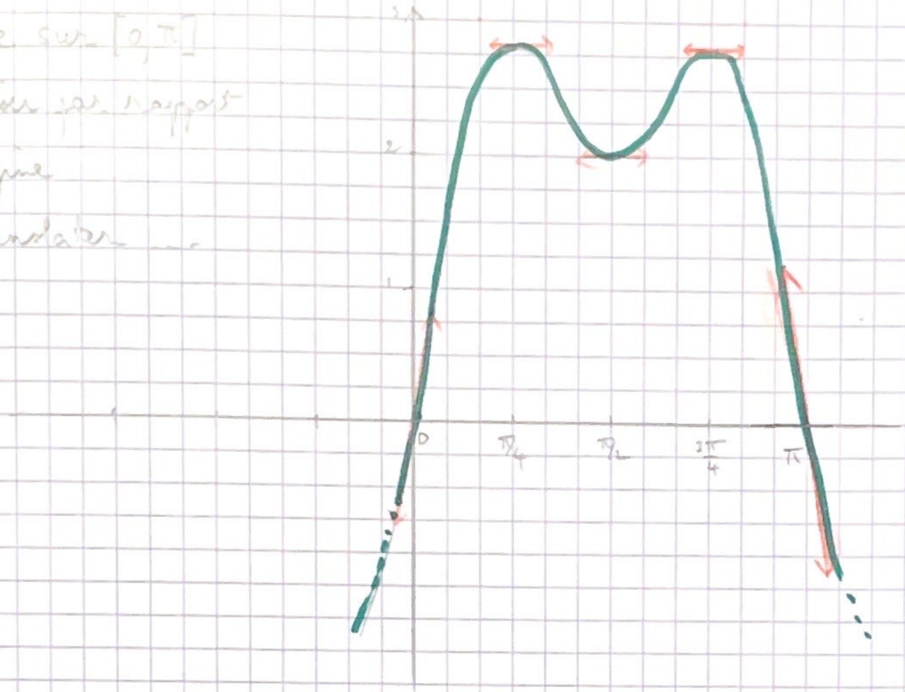
<u>Rappel</u>

$$\cos p + \cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$
$$= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	.	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

<u>Bonus</u> On peut montrer que $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie.

La courbe sur $[0, \pi]$
à symétriser par rapport
à l'origine
puis à translater ...



<u>Bonus</u> : $f'(0) = 6$ donc on peut tracer la tangente au point d'abscisse 0.

et $f'(\pi) = -6$.

i) L'expression donnée a un sens dès que $x \neq \pm\sqrt{3}$ donc on a une fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3}{x^2-3}. \end{array}$$

Quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, f est impaire. Nous allons donc l'étudier sur $E = \mathbb{R}_+ \setminus \{\sqrt{3}\}$.
La fonction f est dérivable par opérations.
Soit $x \in E$. On a

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3(2x)}{(x^2-3)^2}.$$

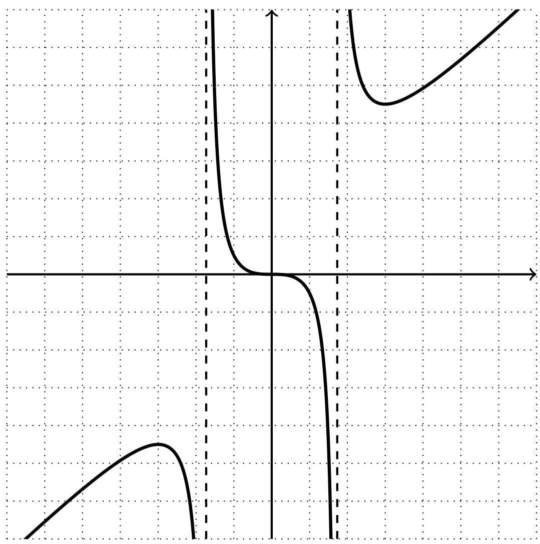
Le dénominateur étant > 0, $f(x)$ est du même signe que

$$3x^2(x^2-3) - x^2(2x) = x^2(3x^2 - 9 - 2x^2) = x^2(x^2-9) = x^2(x-3)\underbrace{(x+3)}_{>0}.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant de f sur E.

x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
f'	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0 $\searrow$		$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$9/2$	$\nearrow$	$+\infty$

La seule limite un peu subtile est celle en $+\infty$, que l'on obtient en factorisant numérateur et dénominateur par les termes prépondérants : quel que soit $x \in E$, on a $\frac{x^3}{x^2-3} = x\frac{1}{1-\frac{3}{x}}$. Comme on a $\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, il s'ensuit $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Voilà enfin le graphe de f.



ii) L'expression donnée a un sens si et seulement si $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x^2 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $|x| > 1$. On a donc une fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2 - 1). \end{array}$$

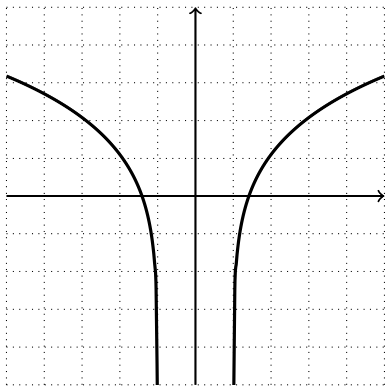
Composée (dans le bon sens !) d'une fonction quelconque et d'une fonction paire, f est paire, donc nous allons simplement l'étudier sur $]1, +\infty[$.
La fonction f est dérivable par opérations.
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} > 0,$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Les limites se calculent très simplement et on obtient le tableau de variations suivant de f sur $]1, +\infty[$.

x	1		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Voilà enfin le graphe de f.



iii) On voit directement que l'expression $\frac{\ln|x|}{x}$ a un sens si et seulement si $x \neq 0$. Pour déterminer quand cette quantité est $\geqslant 0$ (de telle sorte que sa racine carrée soit définie), on peut par exemple procéder à une disjonction de cas :

— si $x \in \,]-\infty, -1[$, $\ln|x| > 0$ et $x < 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;

— si $x \in [-1, 0[$, $\ln|x| < 0$ et $x < 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée est définie ;

— si $x \in \,]0, 1[$, $\ln|x| < 0$ et $x > 0$, donc le quotient est strictement négatif et la racine carrée n'est pas définie ;

— si $x \in [1, +\infty[$, $\ln|x| > 0$ et $x > 0$, donc le quotient est positif et la racine carrée n'est pas définie.

L'expression donnée a donc un sens si et seulement si $x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$, ce qui nous donne une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-1, 0[\cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}. \end{array}$$

(a) Sur $[-1, 0[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(-x)}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 0[$.
Soit $x \in \,]-1, 0[$. On a

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1 - \ln(-x)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln(-x)}{x}}},$$

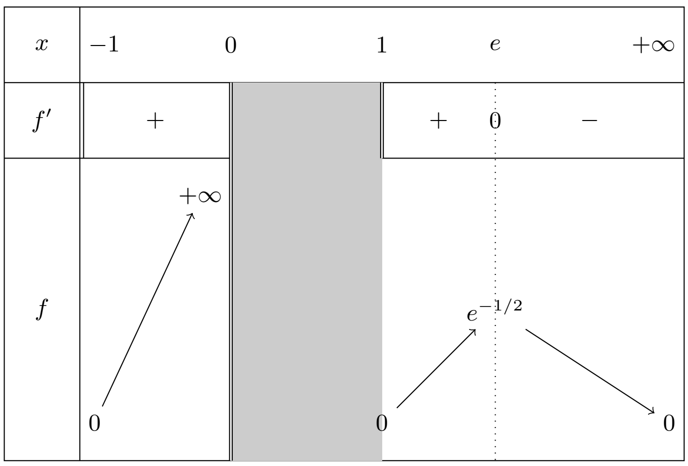
qui est du même signe que $1 - \ln(-x)$, c'est-à-dire > 0.

(b) Sur $[1, +\infty[$, la fonction f peut se réécrire $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$. Comme la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
Soit $x \in \,]1, +\infty[$. On a

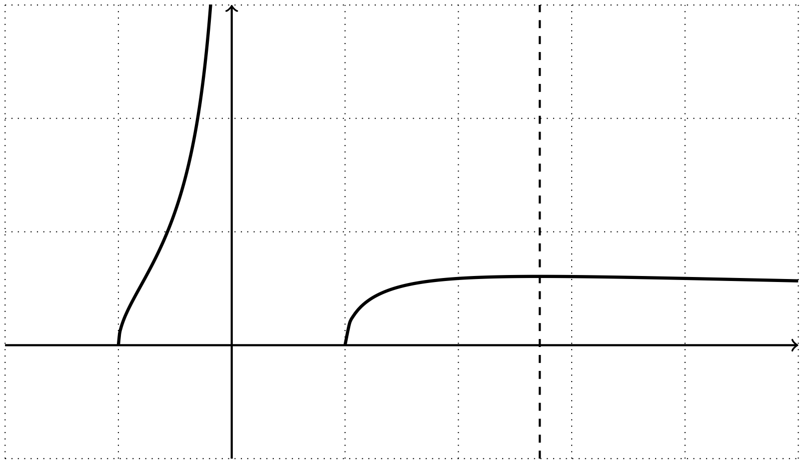
$$f'(x) = \frac{\dfrac{1 - \ln x}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}},$$

qui est du même signe que $1 - \ln x$.

On obtient ainsi le tableau de variations de f.



Voici enfin le graphe de f.



iv) L'expression donnée est définie si et seulement si $x \in D_{\tan}$ et $\tan(x) \neq 0$ et $2x \in D_{\tan}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \end{cases}$$
$$\iff x \neq 0 \mod \pi/2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\tan(2x)}{\tan(x)} \text{ bien définie } &\iff \begin{cases} x & \in D_{\tan} \\ \tan(x) \neq & 0 \\ 2x & \in D_{\tan} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \\ x \not\equiv 0 & \mod \pi \\ 2x \not\equiv \frac{\pi}{2} & \mod \pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \not\equiv 0 & \mod \pi/2 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{4} & \mod \pi/2 \end{cases} \\ &\iff x \not\equiv 0 \mod \pi/4. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on définit $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \mod \pi/4\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\frac{\pi}{4}, (k+1)\frac{\pi}{4}\right[$, on a une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{\tan(2x)}{\tan x} \end{array}.$$

Le domaine D est (clairement) $\frac{\pi}{4}$-périodique et symétrique. Quotient de deux fonctions impaires, la fonction f est paire. Quotient de deux fonctions π-périodiques, elle est π-périodique. On va donc se contenter de l'étudier sur $E = \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
La formule d'addition de la tangente permet de voir que

$$\forall x \in D, f(x) = \frac{2}{1 - \tan^2(x)}.$$

La fonction f est dérivable par opérations. Soit $x \in E$. On a (en utilisant la formule $\tan' = 1/\cos^2$, ici plus judicieuse car elle donne des expressions plus factorisées)

$$f'(x) = \frac{2\frac{1}{\cos^2(2x)} \tan x - \tan(2x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}.$$

Comme $\tan^2 x > 0$ (car $x \in D$), cette expression a le même signe que son numérateur. On peut en fait encore la simplifier davantage en multipliant par $\cos^2(x)\cos^2(2x)$, également > 0 car $x \in D$ (donc $x, 2x \in D_{\tan}$) : $f'(x)$ est du même signe que

$$\begin{aligned} 2\tan(x)\cos^2(x) - \tan(2x)\cos^2(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x) - \sin(2x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x)(1 - \cos(2x)). \end{aligned}$$

Or, comme $x \in E$, on a $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin(2x), 1 - \cos(2x) > 0$.
On a donc montré que $\forall x \in E, f'(x) > 0$, ce qui montre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles qui constituent E, c'est-à-dire $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il était en fait plus judicieux de s'éloigner un peu du plan du cours et d'utiliser la fomule alternative, qui permet d'écrire, sur chacun des intervalles que l'on considère, la fonction f comme composée de fonctions dont on connaît le sens de variations. On obtenait directement que f était strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.
On obtient alors le tableau de variations de f sur E.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$+$	‖	$+$	‖
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

Justification des limites.

(a) La limite en 0^+ est la plus délicate à déterminer. Il y a au moins deux possibilités :

- on utilise la formule alternative que l'on a énoncée en remarque, en ajoutant que, par continuité de la fonction tangente, on a $\tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$;
- on utilise le fait que la fonction tan (resp. $x \mapsto \tan(2x)$) est dérivable en 0, de dérivée 1 (resp. 2), ce qui donne, par définition, les limites des taux d'accroissement

$$\frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\tan(2x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

En passant au quotient, on obtient

$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

(b) Les limites en $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\pm}$ sont plutôt faciles. Par continuité de tan en $\frac{\pi}{4}$, on a

$$\tan(x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{\pm}]{} \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$

donc

$$\tan(x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{-}]{} +\infty \qquad \text{et} \tan(2x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{4}^{+}]{} -\infty.$$

(c) On a, par exemple par continuité de tan en π, que

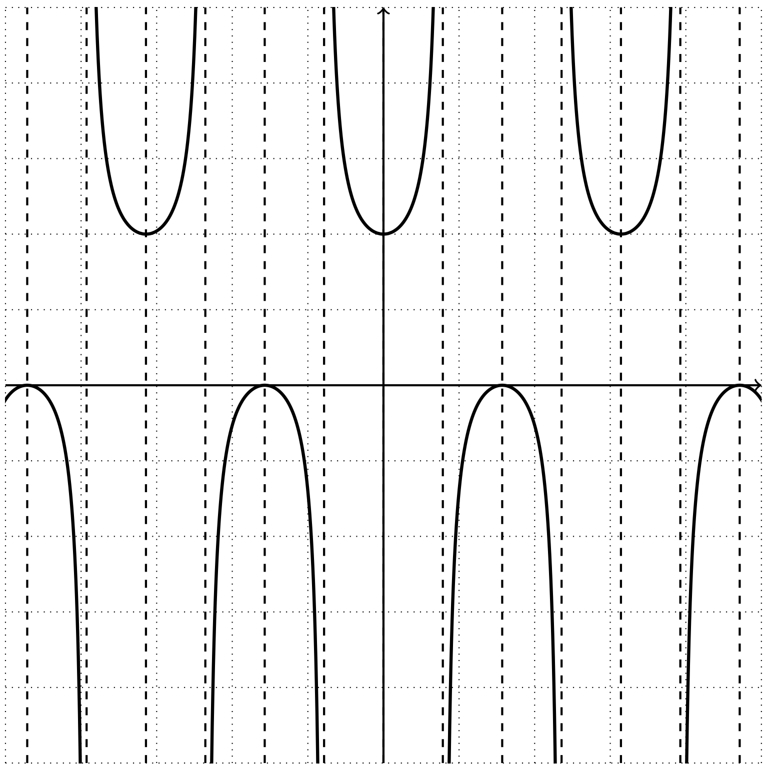
$$\tan(2x) \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}]{} 0.$$

Comme en outre $\tan x \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}^{-}]{} +\infty$, on en déduit

$$\frac{\tan(2x)}{\tan x} \xrightarrow[x\to \frac{\pi}{2}^{-}]{} 0.$$

Encore une fois, c'était également faisable (et facile) avec la formule alternative.

Voici le graphe de f, prolongé par parité et périodicité.



v) La formule donnée a un sens pour $x \neq 0$ et définit une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}. \end{array}$

Cette fonction est paire en tant que produit de deux fonctions impaires (le deuxième facteur $x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ étant impair comme composée de deux fonctions impaires). Nous allons donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Déterminer le signe de cette expression n'est pas aisé, mais on peut constater que la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est à son tour dérivable par opérations (autrement dit, f est deux fois dérivable) et calculer f''.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1 + x^2 - x\,2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

On obtient alors successivement un tableau de variations pour f', ce qui nous donne son signe, et nous donne alors le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
f''		$-$	
f'	?	$\searrow$	0
f	0	$\nearrow$	1

Justification des limites.

(a) Commençons par la limite de f' en $+\infty$.

(b) L'expression donnée ayant clairement un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(3x) + 3\sin(x). \end{array}$

La fonction étant impaire et 2π-périodique, on va l'étudier sur la demi-période $D = [0, \pi]$.

La fonction f est dérivable par opérations.

Soit $x \in D$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(3x) + 3\cos(x) \\ &= 3\left(\cos(3x) + \cos(x)\right). \end{aligned}$$

Commençons par déterminer les zéros de cette dérivée. Soit $x \in D$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff \cos(3x) = -\cos(x) \\
&\iff \cos(3x) = \cos(\pi + x) \\
&\overset{\star}{\iff} 3x \equiv \pi + x \mod 2\pi \text{ ou } 3x \equiv -(x+\pi) \mod 2\pi \\
&\overset{\star\star}{\iff} 2x \equiv \pi \mod 2\pi \text{ ou } 4x \equiv \pi \mod 2\pi \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi/2 \\
&\overset{\star\star\star}{\iff} x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \right) \\
&\iff x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}.
\end{aligned}$$

Justifications.

$\star$ Cas d'égalité des cosinus.

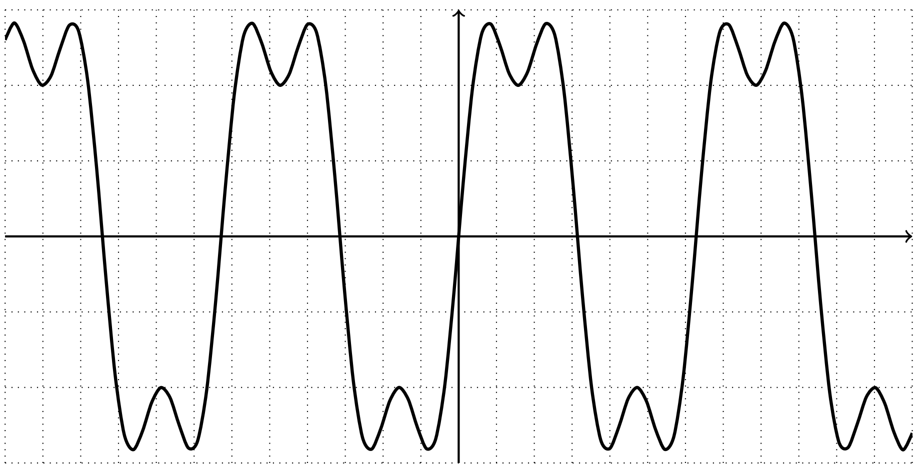
$\star\star$ Car $-\pi \equiv \pi \mod 2\pi$.

$\star\star\star$ Car $x \in [0, \pi]$.

En calculant des valeurs de f' (par exemple en 0, $\pi/3$, $2\pi/3$ et π), on obtient donc le tableau de signes de f', ce qui nous donne le tableau de variations de f.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0

Voici le graphe de f, prolongé par imparité et périodicité. Attention, le repère n'est pas orthonormé.



Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ »}$$

Il peut être utile de poser $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ de sorte que $\mathcal{H}_n$ s'énonce :

$$\mathcal{H}_n : \text{« la fonction } f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R}^+ \text{ »}$$

Initialisation.

Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$$

Or $\mathrm{e}^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!}$.

D'où $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

La fonction f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'_{n+1}(x) &= \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n+1} k\frac{x^{k-1}}{k!} \\
&= \mathrm{e}^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \\
&= f_n(x)
\end{aligned}$$

D'après $\mathcal{H}_n$, la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que la fonction f'_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Donc la fonction f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or $f_{n+1}(0) = 0$.
Donc f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}^+$.

110

Posons

$$f: \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^x(1-x)^{1-x} = \exp\left(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right). \end{array}$$

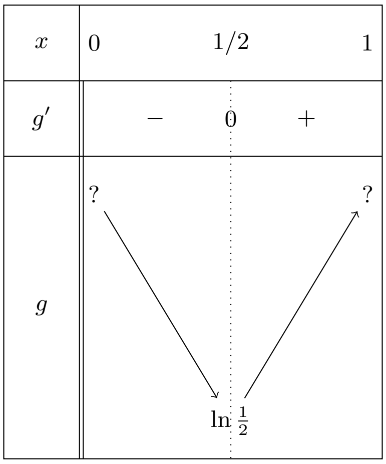
Posons enfin, dans un souci de simplicité,

$$g: \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x + (1-x)\ln(1-x). \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ (par somme de telles fonctions), et on a :

$$\forall\, x \in]0,1[, \qquad \begin{array}{rcl} g'(x) & = & \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 \\ & = & \ln x - \ln(1-x) \end{array}$$

Par stricte croissance du logarithme, le signe de cette expression (c'est-à-dire la position relative de $\ln x$ et $\ln(1-x)$) ne dépend que de la position relative de x et de $1-x$. On dresse alors facilement le tableau de variations suivant.



Cela démontre $\forall\, x \in]0,1[,\ g(x) \geqslant \ln \frac{1}{2}$.
La fonction exponentielle étant croissante, on a :

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad f(x) \geqslant \frac{1}{2}$$

111

Posons $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2} + t - \mathrm{e}^t$ et montrons que f est positive.
On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2} + 1 - \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad f''(t) = (4t^2+2)\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^t.$$

— Si $t \notin [0,1]$, on a $f''(t) > 0$ car $t^2 \geqslant t$ et donc $(4t^2+2)\mathrm{e}^{t^2} \geqslant 2\mathrm{e}^t > \mathrm{e}^t$.

— Si $t \in [0,1]$, on écrit $f''(t) = \mathrm{e}^{t^2}\left(4t^2 + 2 - \mathrm{e}^{t-t^2}\right)$.
Comme $t - t^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $t \in [0,1]$, on a $\mathrm{e}^{t-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{4}} < 2$ et donc $f''(t) > 0$.

La fonction f' croît sur $\mathbb{R}$.
Comme $f'(0) = 0$, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Le minimum de f est obtenu en 0 et vaut $f(0) = 0$.
Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t.$$

Autre stratégie.

On peut aussi poser $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{t^2}+t}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{t^2-t} + t\mathrm{e}^{-t}$.
Et il s'agit de montrer que f est supérieure à 1.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : t \mapsto (2t-1)\mathrm{e}^{t^2-t} + (1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, le réel $f'(t)$ est du signe de $g(t) := (2t-1)\mathrm{e}^{t^2} + (1-t)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : t \mapsto (4t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^{t^2} - 1$.
Le minimum de $t \mapsto 4t^2 - 2t + 2$ vaut $\frac{7}{4}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) \geqslant \frac{7}{4} - 1 > 0$.
Ainsi, la fonction g est croissante.
Comme $g(0) = 0$, la fonction g est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Il en est de même de f'.
Le minimum de f est obtenu en 0 et il vaut $f(0) = 1$.

1. L'étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$ sur $\mathbb{R}^+$ montre que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leqslant x$ (✠)
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre alors l'inégalité de l'énoncé en distinguant les cas.
   — Si $x \in [0, \pi]$, on a $|\sin x| = x$ et $|x| = |x|$, donc l'inégalité (✠) montre que $|\sin x| \leqslant |x|$.
   — Si $x \in [1, +\infty[$, on a clairement $|\sin x| \leqslant 1 \leqslant |x|$.
   Ces deux premiers points montrent l'inégalité voulue si $x \geqslant 0$.
   — Si $x \leqslant 0$, on utilise les deux premiers points pour montrer
   $$|\sin x| = |- \sin x| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|\,.$$
2. L'étude de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x - x$, dérivable sur $[0, 1[$, montre que $\forall x \in [0, 1[\,, \operatorname{Arcsin} x \geqslant x$.
   On a par ailleurs $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} \geqslant 1$, donc on peut étendre l'inégalité précédente à $[0, 1]$.
   Pour tout $x \in [0, 1]$, on a alors $|\operatorname{Arcsin}(x)| = \operatorname{Arcsin}(x) \geqslant x = |x|$.
   Pour $x \in [-1, 0]$, on a enfin
   $$|\operatorname{Arcsin} x| = |- \operatorname{Arcsin} x| = |\operatorname{Arcsin}(-x)| \geqslant |-x| = |x|$$
   d'après ce qui précède.
3. La première inégalité est une simple reformulation de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leqslant 1$.
   Pour l'autre inégalité, on introduit la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x)$. Cette fonction étant paire, il suffit de montrer qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
   La fonction f est clairement deux fois dérivable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = x - \sin x$ et $f''(x) = 1 - \cos x$. La fonction f'' est donc positive, ce qui montre que f' est croissante. Comme $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est positive, et donc que f est croissante. Comme $f(0) = 0$, cela montre l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$, et conclut.
4. Comme dans les questions précédentes, on étudie la fonction (dérivable) $x \mapsto \tan x - x$ pour montrer l'inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, où tan est positive, et on conclut en exploitant l'imparité des fonctions.

1. — On a $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   En effet, la fonction Arctan est croissante, donc $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$, a fortiori $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) > -\frac{\pi}{2}$.
   De plus, $\operatorname{Arctan}(k+1) < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$ (car $k \geqslant 0$), donc $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) < \frac{\pi}{2}$.
   — La formule d'addition de tan prouve que
$$\tan\big(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k\big) = \frac{(1+k)-k}{1+(1+k)k} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$
   Ces deux points montrent que :
$$\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

2. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k) \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) \qquad \text{(télescopage)} \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1)\end{aligned}$$
   On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

   Remarque. Plus tard, dans l'année, on dira que la série de terme général $\dfrac{1}{k^2+k+1}$ converge et que sa *somme* vaut :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On utilise la relation fondamentale (penser à la dérivée de la fonction tangente) :

$$\forall\, t \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad 1+\tan^2 t \;=\; \frac{1}{\cos^2 t}$$

On l'applique pour $t = \operatorname{Arctan} x$ (avec le x fixé dans l'énoncé), ce qui est licite, car un tel t appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui est bien dans l'ensemble de définition de la fonction tangente.
On obtient :

$$1+\tan^2\left(\operatorname{Arctan} x\right) \;=\; \frac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan} x)}$$

D'où

$$1+x^2 \;=\; \frac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan} x)}$$

D'où

$$\cos^2(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \frac{1}{1+x^2}$$

D'où (attention à la disjonction de cas) :

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{ou} \qquad \cos(\operatorname{Arctan} x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Comme $\operatorname{Arctan} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et que la fonction cosinus est positive sur cet intervalle, on obtient

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

• Pour $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, on peut penser à exploiter la relation fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$, mais ce n'est pas une bonne idée (confer plus bas).
Une solution élégante, consiste à utiliser la relation $\sin = \tan \times \cos$.
On a :

$$\sin(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \tan(\operatorname{Arctan} x) \times \cos(\operatorname{Arctan} x) \;=\; x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Remarque. Si on utilise $\cos^2 + \sin^2 = 1$, attention à ne pas arnaquer le correcteur (ou attention à ne pas commettre d'erreurs...). C'est délicat.
On a

$$\sin^2(\operatorname{Arctan} x) \;=\; 1-\cos^2(\operatorname{Arctan} x) \;=\; 1-\frac{1}{1+x^2} \;=\; \frac{x^2}{1+x^2}$$

Bref,

$$\sin^2(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \frac{x^2}{1+x^2}$$

Donc (attention à la valeur absolue) :

$$\sin(\operatorname{Arctan} x) \;=\; \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{ou} \qquad \sin(\operatorname{Arctan} x) \;=\; -\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il faut ensuite faire une disjonction de cas en fonction du signe de x.

— Si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est positive, donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) = +\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, qui vaut encore (car $x \geqslant 0$) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

— Si $x \leqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est négative, donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) = -\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, qui vaut encore (car $x \leqslant 0$) $-\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$, c'est-à-dire $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Bilan. Dans les deux cas, on a $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On a
$$\mathcal{D}_f \;=\; \left\{x \in [-1,1] \;\middle|\; -1 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 1\right\}.$$
La double inégalité équivaut, en passant au carré, à
$$4x^2(1-x^2) \leqslant 1 \iff 4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0 \iff (2x^2-1)^2 \geqslant 0.$$
Cette inégalité est toujours vérifiée et donc $\mathcal{D}_f = [-1,1]$.

Soit $x \in \mathcal{D}_f$ **fixé une fois pour toutes.**
Alors x s'écrit $\sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a alors
$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Arcsin}(2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) \\ &= \operatorname{Arcsin}(2\sin t\cos t) \text{ car } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \operatorname{Arcsin}(\sin 2t). \end{aligned}$$
On peut alors simplifier cette expression, mais il faut prendre garde que $\operatorname{Arcsin}(\sin u) = u$ seulement pour $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Dans les autres cas, il faut se ramener à cet intervalle en utilisant les propriétés de la fonction sinus. On trouve

— Si $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\operatorname{Arcsin}(\sin 2t) = 2t$.

— Si $t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\pi - 2t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
De plus, $\sin(\pi - u) = \sin u$.
On en déduit que dans ce cas, $\operatorname{Arcsin}\sin 2t = \operatorname{Arcsin}\sin(\pi - 2t) = \pi - 2t$.

— Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, alors $\pi + 2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$.
En utilisant l'imparité de la fonction Arcsin, on trouve dans ce cas que
$$\operatorname{Arcsin}\sin 2t = -\operatorname{Arcsin}(-\sin(2t)) = -\operatorname{Arcsin}(\sin(\pi + 2t)) = -\pi - 2t$$

On a
$$f(x) \;=\; \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\\ 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\\ \pi - 2\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(i) — Prouvons que l'équation possède une unique solution. La fonction :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1)$$

est continue et strictement croissante (somme de trois fonctions croissantes dont l'une est strictement croissante) et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

L'équation donnée possède donc une unique solution.
Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la solution est strictement positive.

— Déterminons cette solution.
Soit $x \in \mathbb{R}$ telle que

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

On veut appliquer la fonction tangente.
Pour cela, justifions que les deux réels sont dans $\mathcal{D}_{\tan}$.
On a

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;\in\;]0, \pi[$$

De plus, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;\neq\; \frac{\pi}{2}$.

Raisonnons par l'absurde. Si on avait $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \;=\; \frac{\pi}{2}$, *on aurait alors* $\operatorname{Arctan}(x) = 0$, *d'où* $x = 0$. *Mais* 0 *ne vérifie pas l'égalité initiale.*

On a donc montré que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \in \mathcal{D}_{\tan}$$

On peut appliquer la fonction tangente à chacun des membres, ce qui donne :

$$\tan\big(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\big) \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$$

À gauche, on utilise la formule $\tan(a+b)$ et à droite on utilise $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
On obtient l'égalité

$$\frac{2\,x}{2 - x^2} = \frac{1}{x}$$

D'où $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Comme la racine cherchée est positive, on en déduit que $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a prouvé que l'équation donnée possède une unique solution.

Bilan : l'ensemble des solutions est $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$.

(ii) Première chose à déterminer : l'ensemble de définition de l'équation.
Une petite étude de fonction montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fraction $\dfrac{2x}{1+x^2}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$.
Donc l'ensemble de définition de l'équation est $\mathbb{R}$.

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.

Par définition de la fonction Arcsin, on a

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \;\in\; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

D'où

$$2\operatorname{Arctan} x \;\in\; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Puis

$$\operatorname{Arctan} x \;\in\; \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Puis $x \in [-1, 1]$.

Synthèse.

Soit $x \in [-1, 1]$.

Montrons que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.

Partons du membre gauche, mais avant remarquons que x peut s'écrire $\tan t$.
En effet, on a $x \in [-1, 1]$. Comme la fonction tan induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[-1, 1]$, il existe un (unique) $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $x = \tan t$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,\tan t}{1+\tan^2 t}\right) \\
&= \operatorname{Arcsin}(\sin 2t) && \text{il faut se rappeler de cette formule de l'angle moitié} \\
&= 2t && \text{car } 2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= 2\operatorname{Arctan} x
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc le segment $[-1, 1]$.

(iii) **Ensemble de définition de l'équation.**
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} \iff \sqrt{1-x^2} \text{ existe et appartient à } [-1,1] \iff x \in [-1,1]$$

Donc l'ensemble de définition de l'équation est $[-1, 1]$.
La clé. On a :

$$\underbrace{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2})}_{\in[0,\frac{\pi}{2}]} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x}_{\in[0,\pi]}$$

Analyse. Soit $x \in [-1, 1]$ tel que $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
D'où $-\operatorname{Arcsin} x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.
D'où $\operatorname{Arcsin} x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
D'où $x \in [0, 1]$.

Synthèse. Soit $x \in [0, 1]$.

Montrons que

$$\operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$$

Examinons les sinus des deux membres.

— On a $\sin\big(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2})\big) = \sqrt{1-x^2}$.

— On a $\sin(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ (la dernière égalité doit pouvoir être reprouvée, nous l'avons vue en classe).

Les sinus des deux membres sont égaux.
Or les deux membres appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (WHY ?).
Par injectivité de la fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a l'égalité.
Où a-t-on utilisé l'hypothèse $x \in [0, 1]$?

(iv) **Ensemble de définition de l'équation.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{x}}) \text{ et } \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{x+1}}) \text{ existent} &\iff \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{existe et} \in [-1,1]\right) \\
&\iff x > 0 \quad \text{et} \quad \Big(x+1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x \geqslant 0\Big) \\
&\iff x \in \,]0, +\infty[
\end{aligned}$$

L'équation est définie sur $]0, +\infty[$.

La clé. Grâce à l'exercice numéro ..., on sait que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin(\operatorname{Arctan} t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Analyse. Soit $x \in \,]0, +\infty[$ tel que $\operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$.

En appliquant la fonction sinus (licite, car la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$), on obtient avec la formule rappelée :

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

D'où

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}_{=\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

On constate donc que tous les réels ont l'air d'être solution !

Synthèse. Montrons (en fait) que

$$\forall\, x \in \,]0,+\infty[, \quad \operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{x}}) \;=\; \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{x+1}}).$$

Soit $x \in \,]0,+\infty[$.
On peut utiliser le résultat de cours qui dit :

$$\operatorname{Arcsin}(\text{truc}) = \text{machin} \qquad \text{si et seulement si} \qquad \ldots\text{à vous de remplir}\ldots$$

Ou bien, on peut utiliser une reformulation de ce résultat en utilisant le principe « pour montrer que deux objets sont égaux, il suffit de montrer que leur image par une certaine application sont égales, pourvu que cette application soit injective ». On montre (cf. l'analyse) que

$$\sin\Big(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{x}})\Big) \;=\; \sin\Big(\operatorname{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{x+1}})\Big)$$

(car les deux membres valent $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$).
On utilise ensuite le fait que $\operatorname{Arctan}(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$ et $\operatorname{Arcsin}(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}})$ appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est injective, d'où l'égalité

$$\operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{x}}) \;=\; \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{x+1}}).$$

— Commençons par prouver que $\tan\left(5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}+2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79}\right)=1$.
La formule de Moivre permet d'obtenir :

$$\tan 5t=\frac{\sin 5\,t}{\cos 5\,t}=\frac{5\tan t-10\,\tan t^3+\tan t^5}{1-10\,\tan t^2+5\,\tan t^4}\cdot$$

En remplaçant t par $\operatorname{Arctan}(\frac{1}{7})$, on obtient $\tan(5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7})=\frac{2879}{3353}\cdot$
On trouve de même $\tan(2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79})=\frac{237}{3116}\cdot$
En utilisant la formule d'addition donnant $\tan(a+b)$, on en déduit que :

$$\tan\left(5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}+2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79}\right)=\frac{\frac{2879}{3353}+\frac{237}{3116}}{1-\frac{2879}{3353}\frac{237}{3116}}=1.$$

— **Rappel.** Pour $t\in\mathbb{R}$, on a l'équivalence $\tan t=1 \iff t\equiv\dfrac{\pi}{4} \mod \pi$.
Ainsi, pour $t\in\left]\dfrac{\pi}{4}-\pi,\dfrac{\pi}{4}+\pi\right[$, on a l'équivalence $\tan t=1\iff t=\dfrac{\pi}{4}$.

On va montrer que $5\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{79}\in\left]\dfrac{\pi}{4}-\pi,\dfrac{\pi}{4}+\pi\right[$
en montrant que $0\leqslant 5\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}+2\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{79}<\dfrac{5\,\pi}{4}\cdot$
On a

$$0\ \leqslant\ \operatorname{Arctan}\frac{3}{79}\leqslant\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}\ \leqslant\ \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\ =\ \frac{\pi}{6}$$

D'où

$$0\leqslant 5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}+2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79}\leqslant 7\frac{\pi}{6}<\frac{5\,\pi}{4}\cdot$$

(i) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y} \right) + \left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} \right) \right] \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\
&= \operatorname{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

(ii) à vous.

(iii) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} \right) + \left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y} \right) \right] \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

(iv) à vous.

123

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p & = & \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^p \\ & = & (\mathrm{e}^x)^p \\ & = & \mathrm{e}^{px} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch} px + \operatorname{sh} px & = & \dfrac{\mathrm{e}^{px} + \mathrm{e}^{-px}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{px} - \mathrm{e}^{-px}}{2} \\ & = & \mathrm{e}^{px} \end{array}$$

D'où l'égalité.

Résoudre l'équation $a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = 0$

Début de l'exo

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a l'équivalence (multiplier par e^x) :

$$a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = 0 \iff (a+b)e^{2x} = a-b$$

- Cas $a+b=0$
  - Si $a-b=0$, on a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - Sinon, on a $\mathcal{S} = \emptyset$
- Cas $a+b \neq 0$

  L'éq équivaut à $e^{2x} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

  - Si $\dfrac{a-b}{a+b} \notin \,]0, +\infty[$, on a $\mathcal{S} = \emptyset$
  - Sinon, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \right\}$.

Fin de l'exo.

BILAN. On a
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a+b=0 \text{ et } a-b=0 \\ \emptyset & \text{si } a+b=0 \text{ et } a-b\neq 0 \\ \emptyset & \text{si } a+b\neq 0 \text{ et } \frac{a-b}{a+b} \leqslant 0 \\ \{x_0\} & \text{si } a+b \neq 0 \text{ et } \frac{a-b}{a+b} > 0 \end{cases}$$

où $x_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

Étude de la disjonction de cas

On peut cependant s'amuser à reformuler/comprendre la disjonction de cas : on peut essayer de quantifier sur a et b plutôt que sur $\frac{a-b}{a+b}$.

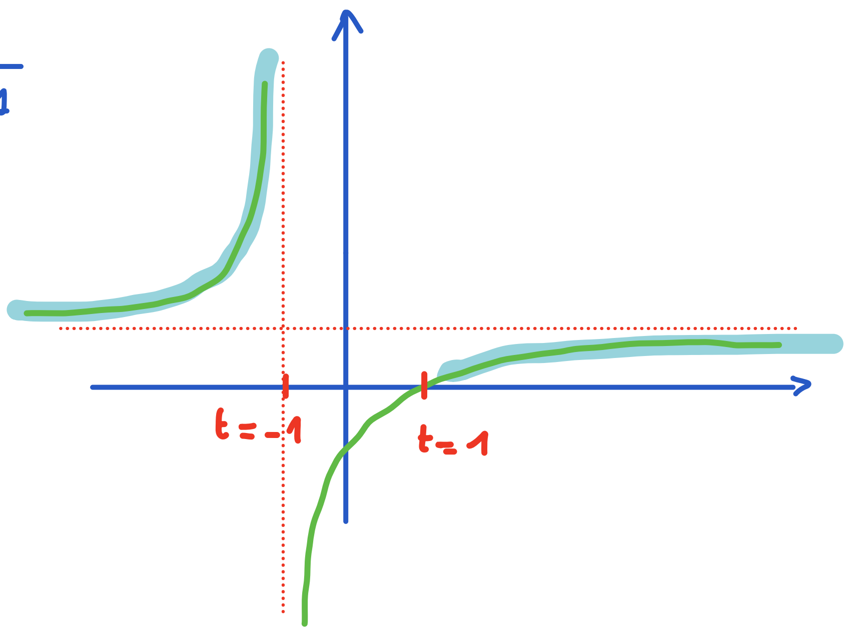
Pour cela, on peut penser à "diminuer" le nombre de variables : passer de 2 à 1 variable.
Peut-on diviser par a ou par b ?

- Remarquons que si $b = 0$, alors l'équation s'écrit $a \operatorname{ch} x = 0$.
  Si $a = 0$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  Sinon, $\mathcal{S} = \emptyset$.
  Bref, on sait traiter le cas $b = 0$ à la main.

- Supposons désormais $b \neq 0$.
  Alors

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$= \frac{t-1}{t+1}$$



On a :

$$\frac{a-b}{a+b} \in]0,+\infty[\iff \frac{a}{b} < -1 \text{ ou } \frac{a}{b} > 1.$$

$$\iff \left|\frac{a}{b}\right| > 1$$

BILAN. On a

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } (a,b) = (0,0) \\ \emptyset & \text{si } b=0 \text{ et } a \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } b \neq 0 \text{ et } \left|\frac{a}{b}\right| \leqslant 1 \\ \{x_0\} & \text{si } b \neq 0 \text{ et } \left|\frac{a}{b}\right| > 1 \end{cases}$$

où $x_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

Cette présentation de la disjonction de cas apparait lorsque l'on utilise la fonction tangente hyperbolique th.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0 \iff a + b \operatorname{th} x = 0$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{th} x = -\frac{a}{b} & \text{si } b \neq 0 \\ a = 0 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

Cas $b \neq 0$

* Si $-\frac{a}{b} \notin]-1,1[$, l'équation $\operatorname{th} x = -\frac{a}{b}$ n'a pas de solution

* Si $-\frac{a}{b} \in]-1,1[$, l'équation $\operatorname{th} x = -\frac{a}{b}$ a une unique solution

(cela nécessite que l'on sache que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$)

126

Il est raisonnable de raisonner par analyse-synthèse, mais ici, on peut dérouler des équivalences (je vous laisse assurer chaque équivalence).
On peut d'ores et déjà supposer $a-b\neq 0$ en regardant le 3$^{\text{ème}}$ système ci-dessous.
Plus précisément, si $a-b=0$, le système n'a pas de solution.

Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On a les équivalences (en supposant $a-b\neq 0$) :

$$\begin{aligned}
x \text{ et } y \text{ solutions du système} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y)=a \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y)=b \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=a+b \\ \mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-y}=a-b \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=a+b \\ \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=(a-b)\mathrm{e}^{x+y} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=a+b \\ a+b=(a-b)\mathrm{e}^{x+y} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=a+b \\ \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=\dfrac{a+b}{a-b} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \text{ et } \mathrm{e}^y \text{ sont racines de } X^2-(a+b)X+\frac{a+b}{a-b} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta\geqslant 0 \ \text{ et } \ (a+b)\pm\sqrt{\Delta}>0 \ \text{ où } \ \Delta \begin{aligned}[t] &= (a+b)^2-4\frac{a+b}{a-b} \\ &= (a+b)\Big((a+b)-\frac{4}{a-b}\Big) \\ &= \frac{a+b}{a-b}(a^2-b^2-4) \end{aligned}
\end{aligned}$$

Réfléchir à comment terminer

127

Occupons-nous de la première somme.

Si $x=0$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx+y) = (n+1)\operatorname{ch} y$.

Désormais, on suppose $x \neq 0$, d'où $\mathrm{e}^x \neq 1$ (ce qui rend licite les calculs ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx+y) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} + \mathrm{e}^{-y}\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\mathrm{e}^y \times \frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \times \frac{e^{-(n+1)x/2}-e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2}-e^{x/2}} + \\
&\qquad \mathrm{e}^{-y} \times \frac{e^{-(n+1)x/2}}{e^{-x/2}} \times \frac{e^{(n+1)x/2}-e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{nx/2+y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + e^{-nx/2-y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\right) \\
&= \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On peut faire un calcul similiaire pour sh et on obtient $\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.

Autre solution, ou plutôt autre présentation (la preuve est la même)

Restons dans le cas $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. On peut aussi avantageusement calculer sans trop d'effort les deux sommes en même temps, en considérant la somme et la différence des deux sommes :

$$\begin{aligned}
C_n + S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{kx+y} \\
&= \mathrm{e}^y \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} \\
&= e^y \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^y e^{\frac{nx}{2}} \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{nx}{2}+y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On a $C_n - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx-y}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$ et y par $-y$. Ainsi :

$$C_n - S_n = e^{\frac{-nx}{2}-y}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$$

Par somme et différence, on récupère donc

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{e^{\frac{nx}{2}+y} + e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} \\
S_n &= \frac{e^{\frac{nx}{2}+y} - e^{-\frac{nx}{2}-y}}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}+y\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Fonction tangente hyperbolique

① Etudions la fct th.

* la fct th est définie sur $\mathbb{R}$ (car ch ne s'annule pas).

* la fct th est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et on a :

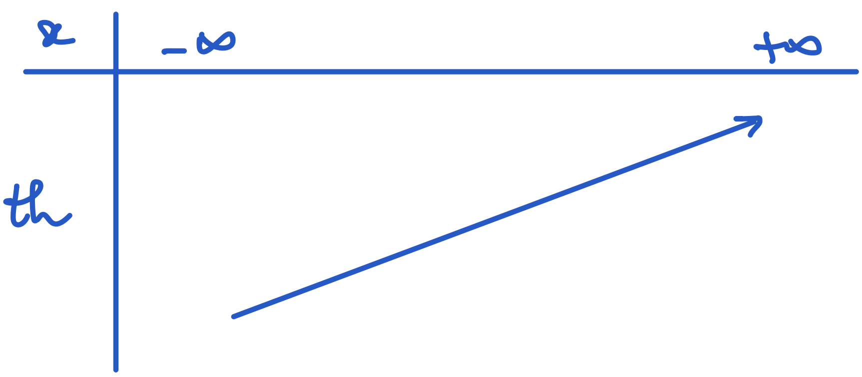
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th'(x) = \frac{sh'x \, ch x - sh x \, ch' x}{ch^2 x}$$

$$= \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}$$

$$= \frac{1}{ch^2 x}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) > 0$

Donc la fct th est strict croissante sur $\mathbb{R}$.



Étude en $+\infty$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})}$$

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

On a $e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où $th\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Étude en $-\infty$

(on peut s'en passer en remarquant que th est impaire).

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

On a $e^{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

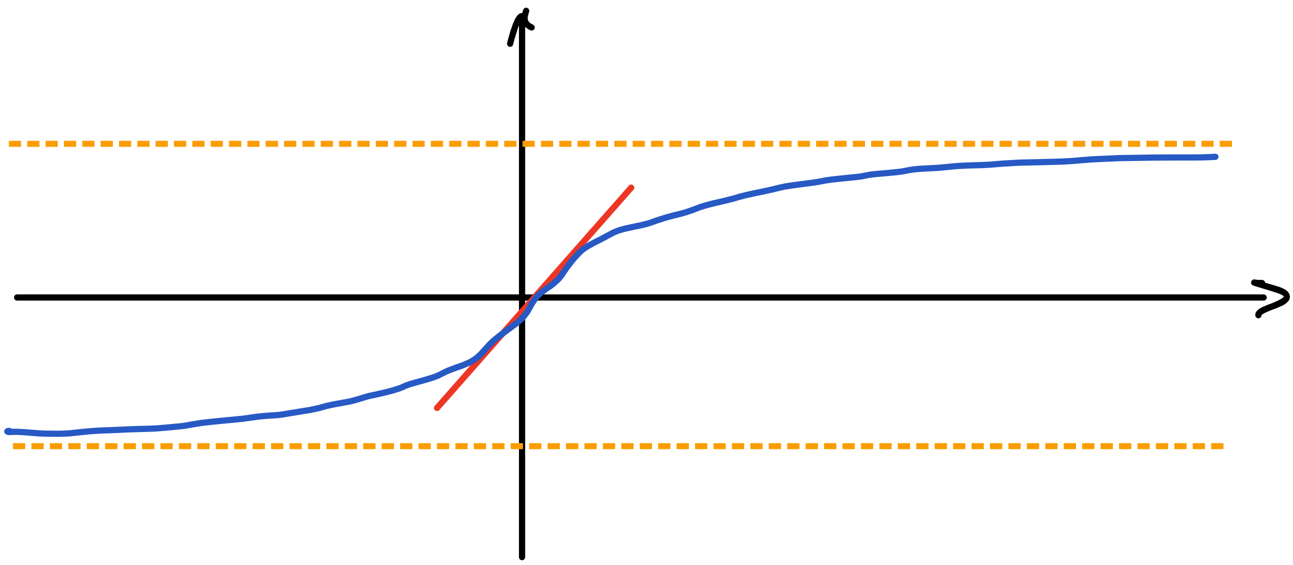
D'où $th\, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

BILAN

x	$-\infty$		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	1

De plus, la fct th est impaire.

D'où un graphe de ce type :



On peut déterminer l'équation de la tangente en 0

Il s'agit de la droite $y = x$ $\left(\begin{array}{l} \text{en effet } th'(0) = 1 \\ \qquad\qquad th(0) = 0 \end{array} \right)$

② Commencer par établir des formules de trigo pour ch et sh.

On a :

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{4}$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}}{4}$$

Par somme, on a :

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = 2\,\frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

$$= \operatorname{ch}(x+y)$$

Etablir tout seul :

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

Puis prouver $\operatorname{th}(x+y) = \dots$

③ Récurrence après avoir fixé $x \in \mathbb{R}$

Pour l'hérédité :

$$\left(\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right)^{n} \times \frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}$$

$$\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)} \times \dots$$

$$\frac{1+\operatorname{th}((n+1)x)}{1-\operatorname{th}((n+1)x)} = \frac{1+\operatorname{th}(nx+x)}{1-\operatorname{th}(nx+x)}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\operatorname{th}(nx)+\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}(nx)\operatorname{th} x}}{1-\dfrac{\operatorname{th}(nx)+\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}(nx)\operatorname{th} x}}$$

$$= \frac{1+\operatorname{th}(nx)\operatorname{th} x + \operatorname{th}(nx)+\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}(nx)\operatorname{th} x - \operatorname{th}(nx) - \operatorname{th} x}$$

$$= \frac{(1+\operatorname{th}(nx))(1+\operatorname{th} x)}{(1-\operatorname{th}(nx))(1-\operatorname{th} x)}$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Mieux, sans récurrence.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{1-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}\right)^n$$

$$= \left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right)^n$$

$$= \frac{e^{nx}}{e^{-nx}}$$

$$= \frac{\operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx}{\operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx}$$

$$= \frac{\operatorname{ch} nx \times \left(1+\frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{ch} nx}\right)}{\operatorname{ch} nx \times \left(1-\frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{ch} nx}\right)}$$

$$= \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$$

④. La fct th est strict monotone donc injective

. La fct th est continue par opérat° et

$\lim_{-\infty} th = -1$ et $\lim_{+\infty} th = 1$

D'après le TVI, l'image de th est $]-1,1[$.

BILAN : th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Cherchons une expression de th^{-1}

Soit $y \in]-1,1[$.

On sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ (il est m̄ unique) tel que $th\, x = y$.

D'où $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$

D'où $e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$

D'où, en multipliant par x :

$$e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1)$$

D'où $e^{2x}(1-y) = y+1$

Comme $1-y \neq 0$, on a $e^{2x} = \dfrac{y+1}{1-y}$

Comme $y \in]-1,1[$, on a $\frac{y+1}{1-y} > 0$

D'où $2x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$

D'où $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$

$$x = \ln\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

Donc $\text{th}^{-1} : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \end{array}$

Rmq On a $\text{th}\, x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$

Donc il y a de la fonction carrée et de l'exponentielle !

Il est donc naturel de voir débarquer la fct $\sqrt{}$ et la fct $\ln$.

Résoudre l'équation $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

Ens de définition

On veut $x \in [-1,1]$ et $\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$

D'où $\mathcal{D} = [-1,1]$

Analyse Soit $x \in [-1,1]$ tq $\text{Arcsin}\, x + \dots = \frac{\pi}{2}$.

On a alors $\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$

Appliquons sinus :

$$\sqrt{1-x^2} = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x\right)}_{\substack{= \\ \cos(\text{Arcsin}\, x) \\ = \\ \sqrt{1-x^2}}}$$

Rmq On obtient "toto = toto".
Peut-être que tous les réels de $[-1,1]$ sont solut°.

On a donc envie d'étudier la fct :

$$f : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

dans le but de montrer qu'elle est constante

⚠ Peut-être qu'elle ne l'est pas (constante)
On n'en sait rien en fait.
L'Analyse est donc uniquement un brouillon ici qui nous a donné des idées.

f est-elle dérivable ? Si oui, où ?!

Ici, il y a un piège !

Comme Arcsin n'est dérivable que sur $]-1,1[$ (et pas en -1 et en 1), il faut faire gaffe aux valeurs de x pour lesquelles $\sqrt{1-x^2}$ vaut ± 1 càd $x=0$.

Bref, on montre par composition que $x \longmapsto \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$

Par somme, f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^{\,2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x/\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x/\sqrt{1-x^2}}{|x|}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi f est constante sur $]0,1[$
(et même sur $[0,1]$ comme on le verra + tard dans l'année ! Mais essayons de nous en passer !)

On a donc
$\forall x \in]0,1[, \ f(x) = c$

Pour déterminer c, on peut prendre $x = 1/2$.

On a $f(\frac{1}{2}) = \text{Arcsin}\, \frac{1}{2} + \text{Arcsin}\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

On remarque que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$

D'où $\forall x \in [0,1], \ f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Quid des $x \in [-1,0[$? Sont-ils solutions ?

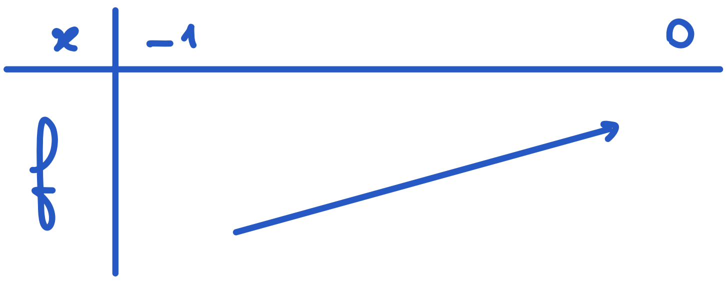
Ce qui est sûr, c'est qu'ils ne peuvent pas être solution car sinon f serait constante sur un intervalle non trivial, donc on aurait $f'=0$ sur $]-1,0[$, ce qui n'est pas.

Montrons qu'aucun $x \in [-1,0[$ n'est solution.

On a $\forall x \in]-1,0[, \ f'(x) > 0$

Donc f est strictem^t croissante sur $]-1,0[$

Visuellement



Ainsi, $\forall x \in [-1,0[, \ f(x) < f(0) = \frac{\pi}{2}$

Donc $\forall x \in [-1,0[, \ f(x) \neq \frac{\pi}{2}$.

BILAN : $\mathcal{S} = [0,1]$.

Autre solution

À la main, sans dériver, mq $\mathcal{S} = [0,1]$.

en mq $\begin{cases} x \in [0,1] \implies \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \\ x \notin [0,1] \implies \text{- - - - - - - - - - -} \neq \end{cases}$

On aura l'équivalence :

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \iff x \in [0,1]$$

Cas $x \in [0,1]$

- Alors x s'écrit $\sin\theta$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

  D'où $\operatorname{Arcsin} x = \theta$

- On a $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$
  $= |\cos\theta|$
  $= \cos\theta$ car $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

  D'où $\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \operatorname{Arcsin}(\cos\theta)$
  $= \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$
  $= \frac{\pi}{2} - \theta$ car $\frac{\pi}{2}-\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- Par somme, on a :

  $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta$
  $= \pi/2$

Cas $x \notin [0,1]$ càd $x \in [-1, 0[$.

On a : $\text{Arcsin}\, x \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$

De plus $\sqrt{1-x^2} \in [0,1[$ (car $x \in [-1,0[$)

D'où $\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$

On a donc $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arcsin}\, x < 0 \\ \text{et} \\ 0 \leqslant \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Par somme des inégalités de droite (celles de gauche ne servent à rien), on a :

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} < \frac{\pi}{2}$$

Rmq : une seule inégalité stricte aurait suffit car la somme de 2 inégalités dont l'une d'entre elles est stricte est une inégalité stricte.

Autre solution

Analyse Soit $x \in [-1,1]$ tq $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

Appliquons la fonction sinus et utilisons l'additivité

$$\sin(\text{Arcsin}\, x)\cos(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}) + \sin(\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2})\cos(\ldots) = 1$$

càd $x\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^{\,2}} + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1$

d'où $x|x| + 1 - x^2 = 1$

d'où $x|x| = x^2$

d'où $|x| = x$ (WHY)

d'où $x \geq 0$

Bilan $x \in [0,1]$

Synthèse. Soit $x \in [0,1]$

Comme $x \in [0,1]$, on a $\text{Arccos}\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

d'où $\text{Arcsin}(\sin(\text{Arccos}\, x)) = \text{Arccos}\, x$

De plus, $\sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$

Or $\forall t \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}\, t + \text{Arccos}\, t = \frac{\pi}{2}$.

Pour $t = x$, on obtient :

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$$