Variables aléatoires

I. Généralités

Variable aléatoire

1 **Définition.** Soit Ω un univers fini.
Une *variable aléatoire* sur Ω est une application $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble.

- **Remarque.** Une variable aléatoire n'est pas une « variable » !
C'est une *application* définie sur Ω. Cette application n'est *pas* aléatoire.

- **Univers image.** L'image de l'application X, à savoir $X(\Omega)$, est souvent appelé *l'univers image* de X.
Comme Ω est un ensemble fini, alors $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{R}$.

- **Vocabulaire.** Une variable aléatoire X est dite
  — réelle, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$
  — complexe, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$
  — entière, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$
  — positive, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

- **Variable aléatoire constante.** Soit E un ensemble et $x_0 \in E$.
L'application $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & x_0 \end{array}$ est une variable aléatoire appelée *variable aléatoire constante* ou *certaine*.

- **Indicatrice.** Soit A un événement de Ω (c'est-à-dire $A \in \mathscr{P}(\Omega)$).
L'application:
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
est une variable aléatoire réelle appelée *variable indicatrice de A* et notée $\mathbb{1}_A$.

- **Structure.** L'ensemble des variables aléatoires **réelles** définies sur Ω est donc l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ (l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$), ensemble sur lequel ont été définies une structure d'espace vectoriel et une multiplication interne.
Ainsi, si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X+Y$, λX et XY sont des variables aléatoires réelles.
On peut faire la même remarque pour les variables aléatoires complexes.

2 **Définition (Transformée d'une VA).**
Soit X une variable aléatoire sur Ω.
Soit g une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans un ensemble E.
L'application $g \circ X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & g\big(X(\omega)\big) \end{array}$ est une variable aléatoire sur Ω, notée $g(X)$, plutôt que $g \circ X$.

Événements liés à une variable aléatoire

La théorie des probabilités utilise, pour décrire certains événements liés aux variables aléatoires, des notations spéciales dont il importe de bien comprendre la signification.

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω, à valeurs dans un ensemble E.

- **Cas général.**
  Soit D une partie de E.
  L'ensemble $X^{-1}(D) = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in D\right\}$, image réciproque de D par l'application X, est noté :
  $$\{X \in D\} \quad \text{ou} \quad (X \in D) \quad \text{ou encore} \quad [X \in D]$$
  L'ensemble $\{X \in D\}$ est une partie de Ω, c'est-à-dire un événement.

- **Cas particulier d'un singleton.**
  Considérons le singleton $D = \{x\}$ (avec $x \in E$).
  Alors l'événement $\{X \in D\}$ qui vaut $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est également noté $\{X = x\}$.
  On remarque que, pour tout $x \notin X(\Omega)$, on a $\{X = x\} = \emptyset$.
  Ainsi, on a toujours $\{X = x\} = \emptyset$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x !!

- **Pour une VA réelle.**
  Soit X une variable aléatoire **réelle** et $x \in \mathbb{R}$. On utilise les notations suivantes :
  $$\begin{aligned} \{X \leqslant x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \\ \{X \geqslant x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\} \\ \{X < x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \\ \{X > x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}. \end{aligned}$$
  On a l'égalité remarquable d'événements :
  $$\{X \leqslant x\} = \{X < x\} \sqcup \{X = x\}$$

- **Pour une indicatrice.**
  Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

  L'événement $\{\mathbb{1}_A = 1\}$ est ......

  L'événement $\{\mathbb{1}_A = 0\}$ est ......

3 **Proposition.** Soit X une variable aléatoire sur Ω.
La famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé *système complet d'événements associé à X* :
$$\Omega = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$$

- **Exemple.** Le système complet d'événements associé à la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est $(A, \overline{A})$.

- **Remarque à méditer.** Soit $D \subset E$.
  L'événement $\{X \in D\}$ peut s'écrire comme réunion (peut-être infinie, si D est infini...) d'événements de la forme $\{X = x\}$:
  $$\{X \in D\} = \bigsqcup_{x \in D} \{X = x\}$$
  Mais on a aussi (WHY) :
  $$\{X \in D\} = \bigsqcup_{x \in D \cap X(\Omega)} \{X = x\}$$
  qui est une réunion **finie** (WHY).
  Ainsi, tout événement du type $\{X \in D\}$ peut s'écrire comme une réunion **finie** d'événements de la forme $\{X = x\}$.

Quelques exemples

- **Dés.** On lance deux dés et on s'intéresse aux deux numéros obtenus. On suppose que ces dés sont discernables (par exemple qu'ils sont de couleurs différentes) ou qu'au moins on peut les distinguer mentalement (de telle sorte qu'il y ait un premier dé et un second).
  On choisit comme univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ de sorte qu'une issue soit le couple des résultats obtenus.
  On introduit les variables aléatoires X_1 et X_2 désignant respectivement les résultats du premier dé et du second dé :
  $$X_1 : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![1,6]\!] \\ (a,b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \text{et} \qquad X_2 : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![1,6]\!] \\ (a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$
  Ces variables aléatoires X_1 et X_2 permettent d'exprimer de manière simple les événements associés à cette expérience aléatoire. Par exemple :
  — l'événement A : « le premier dé donne un numéro pair » s'écrit :
  $$A = \{X_1 \text{ est pair}\} \quad \text{ou encore} \quad A = \{X_1 \in \{2,4,6\}\} \quad \text{ou encore} \quad A = \{X_1 = 2\} \sqcup \{X_1 = 4\} \sqcup \{X_1 = 6\}$$
  — l'événement E : « les deux dés donnent le même résultat » s'écrit :
  $$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
  mais s'écrit aussi $E = \{X_1 = X_2\}$.
  — si l'on note S la variable aléatoire « somme des deux résultats obtenus » :
  $$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![2,12]\!] \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$
  alors on a $S = X_1 + X_2$, de telle sorte que l'événement « la somme des deux résultats obtenus vaut au moins 7 » s'écrit $\{X_1 + X_2 \geqslant 7\}$.

- **Cartes.** Considérons l'expérience consistant à tirer simultanément 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. On peut modéliser cette expérience aléatoire en considérant comme univers l'ensemble des parties à 4 éléments parmi les 52 cartes du jeu.
  Parmi les événements que l'on peut considérer, citons-en deux :
  A = « obtenir au moins un as » $\qquad$ B = « obtenir au moins une carte rouge et une carte noire »
  — Notons X la variable aléatoire donnant le nombre d'as obtenus. Alors on a :
  $$A = \{X \geqslant 1\} \quad \text{et} \quad \overline{A} = \{X = 0\}.$$
  — Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de cartes rouges. Alors on a :
  $$B = \{1 \leqslant Y \leqslant 3\} \qquad \text{et} \qquad \overline{B} = \{Y = 0\} \sqcup \{Y = 4\}$$

- **Pièce.** On effectue n lancers d'une pièce, chaque lancer donnant pile ou face.
  Au résultat PILE, on associe 1 et au résultat FACE, on associe 0.
  Modélisons cette expérience aléatoire par l'univers $\Omega = \{0,1\}^n$.
  Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire associée au $k^{\text{ème}}$ lancer :
  $$X_k : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_k \end{array}$$
  Avec ces notations :
  — l'événement « on n'a obtenu que des piles » s'écrit ....
  — la variable aléatoire égale au « nombre de piles obtenus » est ....
  — l'événement « on a obtenu au moins autant de piles que de faces » s'écrit ....

II. Loi d'une variable aléatoire

Considérons un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Notation. En vue d'alléger les notations, on écrit $\mathbb{P}(X \in A)$ pour désigner la probabilité de l'événement $\{X \in A\}$, au lieu de $\mathbb{P}(\{X \in A\})$; de même, on écrit $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Définition - Propriétés

4
preuve

Théorème. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors l'application :

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée *loi de* X et notée $\mathbb{P}_X$.

- **Remarque.** La loi de X est donc une application !
- **Remarque.** La *loi* de X dépend de la probabilité choisie sur Ω.
  Alors que la *variable aléatoire* X (qui est une application) peut être définie indépendamment de la probabilité.

5

Proposition. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
La loi de X est déterminée de manière unique par la distribution de probabilités $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.

Plus précisément,
$$\forall A \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big), \quad \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

- **Conséquence.** La loi de X est la donnée de :
  — l'univers image $X(\Omega)$
  — la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$

  Parfois, on ne connaît pas exactement $X(\Omega)$ et on connaît seulement un ensemble E tel que $X(\Omega) \subset E$.
  On calcule alors $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E$.
  Lorsque $x \notin X(\Omega)$, on doit trouver $\mathbb{P}(X = x) = 0$ $\big($car lorsque $x \notin X(\Omega)$, on a $\{X = x\} = \varnothing\big)$.

6 **Question.**
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard s boules **sans** remise.
On note X la VA égale au plus grand des numéros tirés.
Déterminer la loi de X.

7 **Question.**
On lance n fois une pièce de monnaie donnant PILE avec une probabilité p.
On note X la VA égale au nombre de PILE obtenus.
Déterminer la loi de X.

8 **Question.**
sol → 30
On lance un dé deux fois successivement.
On note X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus.
Déterminer la loi de X.

9 **Définition.**
On dit que X et Y ont même loi lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

$$\text{c'est-à-dire lorsque } \begin{cases} X(\Omega) = Y(\Omega) \\ \forall\, x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) \;=\; \mathbb{P}(Y = x) \end{cases}$$

On note $X \sim Y$ la relation $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

- **Attention.** Ne pas confondre « X et Y ont même loi » et « X et Y sont égales ».
En effet, l'égalité $X = Y$ équivaut à $\quad \forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = Y(\omega)$

$$\text{c'est-à-dire à} \qquad \forall\, x \in X(\Omega), \quad \{X = x\} \;=\; \{Y = x\}$$

- **Exemple à retenir.**
Soit A un événement de probabilité $\frac{1}{2}$.
Alors les variables $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ ont même loi, mais ne sont pas égales.

En effet, elles sont à valeurs dans $\{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) \;=\; \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\overline{A}} = 0) \;=\; \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) \;=\; \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1) \;=\; \frac{1}{2}$$

Mais $\mathbb{1}_A$ n'est pas égal à $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ car il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\mathbb{1}_A(\omega_0) \neq \underbrace{\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega_0)}_{1-\mathbb{1}_A(\omega_0)}$.

Remarque. En fait, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \iff \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.
Donc $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega)$ pour **tout** $\omega \in \Omega$.

- **Astuce.**
Parfois, il est plus simple de déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ $\big($resp. $\mathbb{P}(X \geqslant x)\big)$ plutôt que directement $\mathbb{P}(X = x)$.
C'est le cas dans des problèmes de maximum (resp. minimum).
Dans le cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on utilisera, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les égalités:

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{P}(X \leqslant k) \;-\; \mathbb{P}(X \leqslant k-1) \qquad\qquad \mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{P}(X \geqslant k) \;-\; \mathbb{P}\big(X \geqslant k+1\big)$$

qui proviennent des égalités d'événements :

$$\{X \leqslant k\} \;=\; \{X = k\} \sqcup \{X \leqslant k-1\} \qquad\qquad \{X \geqslant k\} \;=\; \{X = k\} \sqcup \{X \geqslant k+1\}$$

10 **Question.**
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard s boules **avec** remise.
On note X la VA égale au plus grand des numéros tirés.
Déterminer la loi de X.

11 preuve **Proposition.**
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et g une application définie sur $X(\Omega)$.
La loi de la variable aléatoire $Z = g(X)$ est donnée par :

$$\forall\, z \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}\big(g(X) = z\big) \;=\; \sum_{x \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(X = x).$$

- **Exemple.** Soit X une VA telle que $X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$.
La loi de X^2 est donnée par :
  — $X^2(\Omega) = \left\{k^2,\ k \in [\![0,n]\!]\right\}$ (qui est seulement inclus dans $[\![0, n^2]\!]$).
  — Soit $z \in X^2(\Omega)$. Alors z s'écrit k^2 pour $k \in [\![0,n]\!]$.
    — Si $z = 0$, alors $\{X^2 = 0\} = \{X = 0\}$. D'où $\mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$.
    — Si $z \neq 0$, alors $\{X^2 = z\} = \{X = k\} \sqcup \{X = -k\}$. D'où $\mathbb{P}(X^2 = z) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = -k)$.

12
sol → 31

Question.
Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X et $|X|$.

13
preuve

Proposition (conservation de la loi par transformation).
Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit g une application définie sur $X(\Omega)$.
On a l'implication :

$$X \sim Y \implies g(X) \sim g(Y)$$

14 **Définition.**
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E, ensemble fini non vide.
On dit que X suit *la loi uniforme sur E* lorsque

— X est à valeurs dans E on a même l'égalité $X(\Omega) = E$

— $\forall\, x \in E,\quad \mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{\operatorname{card}(E)}$.

On note $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Cas particuliers.

Soit $a \leqslant b \in \mathbb{Z}$.
X suit une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ lorsque

— X est à valeurs dans $[\![a, b]\!]$

— $\forall\, k \in [\![a, b]\!],\quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$

On note $X \sim \mathscr{U}([\![a, b]\!])$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ lorsque

— X est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$

— $\forall\, k \in [\![1, n]\!],\quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$

On note $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

- **Situation typique.**
Considérons l'expérience qui consiste à choisir un élément au hasard dans un ensemble fini non vide E.
Alors la VA égale à l'élément choisi suit la loi uniforme sur E.

Considérons l'expérience qui consiste à tirer une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Alors la VA égale au numéro de la boule tirée suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Considérons l'expérience qui consiste à lancer (1 fois) un dé *équilibré*.
Alors la VA égale au numéro du dé suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

15 **Définition (Loi de Bernoulli)**
Soit $p \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire.
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p lorsque

— X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et même $X(\Omega) = \{0, 1\}$ lorsque $p \in]0, 1[$

— $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

- **Situation typique.**
Considérons l'expérience à deux issues : « succès » ou « échec » où p est la probabilité du succès.
Alors la VA égale à 1 en cas de succès et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

- **Remarque.**
Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli (on dira est une variable de Bernoulli) si et seulement si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$.

- **Indicatrice.**
Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
Donc l'indicatrice d'un événement est une variable de Bernoulli.
Réciproquement, toute variable de Bernoulli est l'indicatrice d'un événement (en l'occurrence de l'événement $\{X = 1\}$).

16 **Définition (Loi binomiale)**

Soit $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque

— X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et même $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ lorsque $p \in \,]0,1[$

— $\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

- **Situation typique.**
Considérons l'expérience qui consiste à répéter de manière identique et indépendante n fois une même expérience à deux issues : « succès » ou « échec » où p est la probabilité du succès.
Alors la VA égale au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.

III. Couples de variables aléatoires

Définition

17 **Définition.**
Soit X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans E et F respectivement.
L'application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$$

est appelée *couple de variables aléatoires* sur Ω.
Cette application est notée (X, Y).

- **Remarque.** Un couple de variables aléatoires est simplement une application de Ω dans $E \times F$, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans le produit cartésien $E \times F$.
- **Mini attention.** L'image $(X, Y)(\Omega)$ est la partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ formée des couples $\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ où ω décrit Ω.
  En général $(X, Y)(\Omega)$ est *strictement* inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, qui est l'ensemble formé des couples $\big(X(\omega), Y(\omega')\big)$ avec $\omega, \omega' \in \Omega$.

  On lance un dé.
  Notons X la variable aléatoire qui désigne le *numéro*, et Y la variable aléatoire qui désigne sa *parité*.
  On note $Z = (X, Y)$.
  Alors $(5, \text{pair}) \notin Z(\Omega)$, mais $(5, \text{pair}) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

- **Événements liés à un couple.**
  Soit X une VA à valeurs dans E. On rappelle que, pour $x \in E$, on a $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
  On a aussi une notation analogue pour un couple de VA.

$$\begin{aligned} \{(X, Y) = (x, y)\} &= \Big\{\omega \in \Omega \mid \big(X(\omega), Y(\omega)\big) = (x, y)\Big\} \\ &= \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \ \text{ et } \ Y(\omega) = y\Big\} \\ &= \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\Big\} \cap \Big\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y\Big\} \\ &= \{X = x\} \cap \{Y = y\} \end{aligned}$$

- **Exemple des deux dés.** On lance deux dés.
  Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.
  Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles.
  Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :

$$\Big\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \ \Big| \ i \leqslant j\Big\}.$$

- **Autre exemple.** Une urne contient 2 boules bleues, 3 boules blanches et 4 boules rouges. On extrait simultanément 3 boules de l'urne.
  On note X le nombre de boules bleues et Y le nombre de boules blanches.
  Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles.
  La variable aléatoire X est à valeurs dans $[\![0, 2]\!]$ et Y est à valeurs dans $[\![0, 3]\!]$. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :

$$\Big\{(i, j) \in [\![0, 2]\!] \times [\![0, 3]\!] \ \Big| \ i + j \leqslant 3\Big\}.$$

18 **Proposition.** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur Ω.
La famille d'événements $\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω appelé *système complet d'événements associé au couple* (X,Y).

$$\Omega \;=\; \bigsqcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \{X=x\}\cap\{Y=y\}$$

- **Remarque.** Si Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big) \;=\; 1.$
- **Notation.** La probabilité $\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)$ pourra être notée $\mathbb{P}(X=x,Y=y)$.

Loi conjointe de deux VA

19 **Définition.**
Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$. La *loi conjointe* de X et Y est la loi du couple (X,Y).

- **Reformulation.** Par définition de la loi d'une variable aléatoire, la loi du couple (X,Y) est l'application :

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} :\; \begin{array}{rcl} \mathscr{P}\big((X,Y)(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}\big((X,Y)\in A\big) \end{array}$$

C'est une probabilité sur $(X,Y)(\Omega)$.

- **Dans la pratique.**

La loi conjointe des variables aléatoires X et Y — ou encore la loi du couple (X,Y) — est caractérisée par la donnée de
— $X(\Omega)\times Y(\Omega)$
— des valeurs $\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

- **Transformée d'une VA.**
Comme à la proposition 11, on peut s'intéresser à la loi d'une transformée du couple (X,Y).
Par exemple, lorsque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, on peut s'intéresser à la VA $X+Y$.
Notons que $X+Y$ s'écrit $g\circ(X,Y)$, où $g:(x,y)\mapsto x+y$.
Lorsque les variables sont à valeurs **réelles**, on peut également s'intéresser à $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$.

- **Exemple des deux dés.** On lance deux dés équilibrés.
Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.
Déterminons la loi conjointe de X et Y.
On munit l'univers $\Omega=[\![1,6]\!]^2$ de la probabilité uniforme.
Soit $(i,j)\in[\![1,6]\!]^2$.
On a l'égalités d'événements :

$$\{X=i\}\cap\{Y=j\} \;=\; \begin{cases} \varnothing & \text{si } i>j \\ \{(i,i)\} & \text{si } i=j \\ \{(i,j),(j,i)\} & \text{si } i<j \end{cases}$$

En appliquant $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\Big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\Big) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i>j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i=j \\ \frac{2}{36} & \text{si } i<j \end{cases}$$

20 **Définition.** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.
La loi de X est appelée *première loi marginale du couple* et celle de Y est appelée *deuxième loi marginale du couple.*

Le théorème suivant exprime le fait que l'on peut déduire les lois marginales de la loi du couple.
Pour obtenir une loi marginale, on somme par rapport à l'autre variable.

21 preuve **Théorème.** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$.
Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

- **Exemple des deux dés.**
  Déterminons les lois marginales du couple (X,Y) où X est la VA égale au plus petit des nombres, et Y au plus grand.
  On obtient que, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$:

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=1}^{6}\mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = \frac{1}{36} + \sum_{j=i+1}^{6}\frac{1}{18} = \frac{1+2(6-i)}{36} = \frac{13-2i}{36}.$$

  De même, pour tout entier j de $[\![1,6]\!]$, on a:

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2(j-1)+1}{36} = \frac{2j-1}{36}.$$

  Si la loi conjointe est représentée sous la forme d'un tableau, pour obtenir les lois de X et Y, il faut sommer sur les lignes ou les colonnes.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- **Remarque.**
  La connaissance des lois marginales ne suffit pas, en général, à reconstituer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires, sauf pour des variables aléatoires indépendantes.

22 sol → 32 **Question.** Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules avec remise.
On note X le premier numéro tiré et Y le second.
Déterminer la loi conjointe et les lois marginales (reconnaître une loi connue).

Recommencer avec du « sans remise ».

Constater que les lois marginales sont les mêmes que dans le cas précédent !
Morale de l'histoire. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Lois conditionnelles

23 **Définition.** Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
La *loi conditionnelle de X sachant A* est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_A)$.

- **Dans la pratique.**

La *loi conditionnelle de X sachant A* est déterminée par la donnée de

— $X(\Omega)$

— des valeurs $\mathbb{P}_A\big(X = x\big)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

24 sol → 33 **Question.** On lance un dé équilibré.
On note X la variable égale au numéro obtenu.
On note A l'événement « le numéro est pair ».
Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A. Reconnaître une loi connue.

25 **Proposition.**
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)\, \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x).$$

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y).$$

IV. Variables aléatoires indépendantes

Indépendance de deux variables aléatoires

26 **Définition.** Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E et F respectivement.
Les VA X et Y sont dites *indépendantes* lorsque
pour toute partie A de E et toute partie B de F, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F), \quad \mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

- La notion d'indépendance n'est pas une notion ensembliste. Elle dépend de la probabilité choisie.
- La proposition suivante dit qu'il suffit de vérifier cette égalité pour les singletons.
Autrement dit, il suffit de prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ pour $x \in E$ et $y \in F$.

27 preuve **Proposition.** Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E et F respectivement.
Ces VA X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

- **Indépendance & Lois marginales $\Longrightarrow$ Loi conjointe.** La proposition ci-dessus permet de voir que dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la donnée des lois marginales permet de connaître la loi conjointe.
- **Exemple.** Soit X une VA constante et Y quelconque. Alors X et Y sont indépendantes (WHY ?).

28 preuve **Proposition.**
Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Il y a équivalence entre :

(i) X et Y sont indépendantes

(ii) pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}\big(Y = y\big) \neq 0$, la loi de X sachant $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X.

- **Remarque à sauter en première lecture.**
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

  En effet, prenons $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
  Alors $\{X = x\} \neq \emptyset$ et $\{Y = y\} \neq \emptyset$.
  Comme on travaille avec un univers fini, on en déduit que :

  $$\mathbb{P}(X = x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = y) \neq 0,$$

  Donc, par indépendance, on a :

  $$\mathbb{P}\big((X,Y) = (x,y)\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$$

  Donc *a fortiori* $\big\{(X,Y) = (x,y)\big\} \neq \emptyset$.

29 preuve **Question.** Soit X et Y définies sur le même espace probabilisé.
On suppose que X et Y suivent des lois de **Bernoulli**. Montrer que

$$X \text{ et } Y \text{ sont des VA indépendantes} \iff \big\{X = 1\big\} \text{ et } \big\{Y = 1\big\} \text{ sont des év}^{\text{t}} \text{ indépendants}$$

30 preuve

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit φ (resp. ψ) une application définie sur $X(\Omega)$ (resp. sur $Y(\Omega)$).
On a l'implication

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies \varphi(X) \text{ et } \psi(Y) \text{ indépendantes}$$

- **Exemple.** Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $\exp(X)$ et Y^2 le sont aussi.

31 **Question.** Soit X et Y deux variables indépendantes.
On suppose que X (resp. Y) suit la loi de Bernoulli de paramètre p (resp. p').
Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.
Même question avec $Z = \max(X, Y)$ puis $Z = XY$.

32 sol → 35 **Question.** On considère X et Y deux VA indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Indépendance de n variables aléatoires

33 **Définition.**
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$ respectivement.
Ces VA sont dites *mutuellement indépendantes* lorsque

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(E_1) \times \cdots \times \mathscr{P}(E_n), \qquad \mathbb{P}\big(\{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

- **Remarques.**
  — Une suite finie $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes sert à modéliser n épreuves aléatoires indépendantes, la variable X_k représentant le résultat de la k-ième épreuve.
  — On dit souvent indépendantes au lieu de mutuellement indépendantes.
  — L'indépendance d'un n-uplet de variables aléatoires ne dépend pas de l'ordre de ces variables.

- **Rappel.** Fixons des parties $A_i \in \mathscr{P}(E_i)$.
  Les événements $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall I \in \mathscr{P}([\![1, n]\!]), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

  Il y a donc 2^n égalités à vérifier (pour des parties A_i fixées).

  Dans la définition de la mutuelle indépendance des VA, cette égalité n'est demandée que pour $I = [\![1, n]\!]$. Il n'y a donc qu'une seule égalité à vérifiée (pour des parties A_i fixées).

34 preuve

Proposition.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$ respectivement.
Ces VA sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad \mathbb{P}\big(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

- **Remarque 1.** Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Contre-Exemple.
Soit X et Y deux variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $Z = |X - Y|$.
Étudions l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle des variables X, Y et Z.
On a vu que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
On a d'une part :

$$\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Z=1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\big) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Z=1\big)$$

Donc X et Z sont indépendantes.
Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on peut en déduire que Y et Z sont indépendantes.
Donc les variables aléatoires X, Y et Z sont deux à deux indépendantes.
D'autre part,

$$\underbrace{\mathbb{P}\big(\underbrace{\{X=1\}\cap\{Y=1\}\cap\{Z=1\}}_{\emptyset}\big)}_{=0} \neq \underbrace{\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(Z=1)}_{\frac{1}{8}}$$

Donc les variables X, Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes, bien qu'elles soient deux à deux indépendantes.

- **Remarque 2.** Une sous-famille d'une famille indépendante est indépendante.

En maths.
Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de VA *mutuellement indépendantes. Soit $I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])$.*
Alors $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de VA *mutuellement indépendantes.*

Preuve. On suppose que X_i est à valeurs dans E_i.
Montrons que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de VA mutuellement indépendantes.
Pour tout $i \in I$, on fixe une partie A_i de E_i.
On va appliquer la définition de la mutuelle indépendance de $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Pour cela, il nous faut une famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Pour l'instant, on a seulement une famille $(A_i)_{i\in I}$.
Pour tout $i \notin I$, on pose $A_i = X_i(\Omega)$ de sorte que $\{X_i \in A_i\} = \Omega$. Ainsi,

$$\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \{X_i \in A_i\} = \bigcap_{i\in I}\{X_i \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \forall\, i \notin I, \quad \mathbb{P}(X_i \in A_i) = 1$$

Par indépendance de $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Ce qui se réécrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Ainsi $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- **Remarque 3.** Relire la définition 33 et les remarques qui suivent.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement.
Si ces VA sont *mutuellement indépendantes* alors

$$\forall\,(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{P}(E_1)\times\cdots\times\mathscr{P}(E_n), \qquad \text{les év}^{\text{t}}\ \{X_1 \in A_1\},\dots,\{X_n \in A_n\} \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

Preuve. Fixons $(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{P}(E_1)\times\cdots\times\mathscr{P}(E_n)$
Montrons que les év$^{\text{t}}$ $\{X_1 \in A_1\},\dots,\{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.
Pour cela, fixons $I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])$ et montrons que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Par hypothèse $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de VA mutuellement indépendantes, donc en vertu de la remarque 2, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est également une famille de VA mutuellement indépendantes.
D'où l'égalité.

Généralisation à n variables

Reprenons la proposition 30 :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies \varphi(X) \text{ et } \psi(Y) \text{ indépendantes}$$

Ici, il y a **deux** variables aléatoires et **deux** fonctions.

On peut faire deux généralisations :

— en prenant n variables aléatoires X_k et en prenant n fonctions φ_k (qui dépendent chacune d'un seul X_k).

— en prenant n variables aléatoires X_k et en prenant 2 fonctions φ et ψ qui dépendent chacune de plusieurs des X_k.

Cela fait l'objet des deux résultats suivants.

35 **Proposition.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, considérons une fonction φ_i définie sur $X_i(\Omega)$,
On a l'implication

$$X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \implies \varphi_1(X_1), \dots, \varphi_n(X_n) \text{ mutuellement indépendantes}$$

36 preuve **Lemme des coalitions.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit φ une fonction de p variables définie sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega)$.
Soit ψ une fonction de $n-p$ variables définie sur $X_{p+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
On a l'implication

$$X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \implies \varphi(X_1, \dots, X_p) \text{ et } \psi(X_{p+1}, \dots, X_n) \text{ indépendantes}$$

- **Exemple.** Soit X, Y, Z et T des variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Les **deux** variables $X+Y$ et ZT sont indépendantes.
  C'est le lemme des coalitions avec $\varphi : (x, y) \mapsto x + y$ et $\psi : (z, t) \mapsto zt$.

  On montrerait de même que les **trois** variables X, $Y+Z$ et T^2 sont indépendantes.
  Autrement dit, on peut généraliser le lemme des coalitions à un nombre fini $\geqslant 2$ de fonctions.

37 sol → 39 **Question.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ indépendantes.
Soit $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ indépendantes.
Pour tout i, on suppose que $X_i \sim Y_i$.
Montrer que $(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n)$.

De plus, si on suppose que X_i et Y_i sont à valeurs dans E_i, et si on considère g une application définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, alors $g(X_1, \dots, X_n) \sim g(Y_1, \dots, Y_n)$.

Soit $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ comme ci-dessus et à valeurs dans $\mathbb{C}$. En déduire que $X_1 + \cdots + X_n \sim Y_1 + \cdots + Y_n$.

Somme de variables indépendantes de même loi de Bernoulli

38 **Proposition (Somme de deux binomiales indépendantes).**
Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On a

$$\begin{cases} X \text{ et } Y \textit{ indépendantes} \\ X \sim \mathscr{B}(n,p) \\ Y \sim \mathscr{B}(m,p) \end{cases} \implies X + Y \sim \mathscr{B}(n+m,p)$$

39 **Proposition (Somme de n binomiales indépendantes).**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On a

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_n \textit{ mutuellement indépendantes} \\ \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}(m_i,p) \end{cases} \implies X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(s,p)$$

où $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

- **Cas particulier.** Une somme de VA indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p, suit une loi de paramètre p.

40 **Proposition.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Si les VA X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, alors la VA $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

- **Preuve.** D'après 39, on a :

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_n \textit{ mutuellement indépendantes} \\ \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}(1,p) \end{cases} \implies X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$

Ici, les VA sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

V. Espérance

41 **Définition.**
Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'*espérance* de X est le scalaire :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}\big(X=x\big) \qquad \text{Cette somme est finie}$$

On dispose d'une **formule alternative** pour l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \qquad \text{Cette somme est finie}$$

Lorsque $\mathbb{E}(X)=0$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée**.

- Si X est une variable aléatoire **réelle**, alors $\mathbb{E}(X)\in\mathbb{R}$.
- Lorsque $X(\Omega)\subset\{a,b,c\}\subset\mathbb{K}$, on a $\mathbb{E}(X)=$ ....
- Lorsque $X(\Omega)\subset\{x_1,x_2,\dots,x_m\}\subset\mathbb{K}$, on a $\mathbb{E}(X)=$ ....
- Lorsque $X(\Omega)\subset[\![0,n]\!]$, on a $\mathbb{E}(X)=$ ....
- **Important.** L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi :
  deux variables aléatoires de même loi ont même espérance.
- **Interprétation.** L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par les probabilités que X prenne ces valeurs.
  On peut aussi dire que c'est la valeur que l'on attend en moyenne quand on réalise l'expérience aléatoire. Si l'expérience consiste par exemple à tirer des boules dans une urne, on pourra se voir demander : quel est le nombre moyen de boules rouges tirées ? La réponse attendue est l'espérance de la variable aléatoire qui représente le nombre de boules rouges tirées.
- **Remarque.** L'espérance n'est pas nécessairement une valeur de $X(\Omega)$.
  (votre moyenne en maths n'est pas nécessairement égale à une note de pâle).
  En revanche, $\mathbb{E}(X)$ est dans l'intervalle $[\min X(\Omega),\max X(\Omega)]$.
  (votre moyenne en maths est comprise entre votre plus basse note et votre plus haute note de pâle).
- **Exemple.** On lance deux dés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus.
  On a $\mathbb{P}(X=k) \;=\; \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{si } k\in[\![1,6]\!] \\ \frac{13-k}{36} & \text{si } k\in[\![7,13]\!] \end{cases}$
  D'où
  $$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{6} k\frac{k-1}{36} \;+\; \sum_{k=7}^{13} k\frac{13-k}{36} \;\overset{\text{WHY}}{=}\; 7$$

42 **Question.** Soit X une VA à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)$.

43 **Proposition (espérance et variance des lois usuelles).**

— **Uniforme.**

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ où $a \leqslant b \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

— **Bernoulli.**

Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$ où $p \in [0,1]$.

$$\mathbb{E}(X) = p$$

— **Binomiale.**

Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

$$\mathbb{E}(X) = np$$

- **Petit moyen mnémotechnique.** On a $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$ et $\mathscr{U}(\llbracket 0,1 \rrbracket) = \mathscr{B}(\frac{1}{2})$
Autrement dit, on peut vérifier la cohérence des résultats.

44 **Proposition.** Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

- **Refrain.** En lisant cette égalité de droite à gauche, on obtient :

Une probabilité est une espérance !

45 **Proposition (propriétés de l'espérance).**
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

— **Linéarité.** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On a
$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

— **Transformation affine.** Soit $a, b \in \mathbb{K}$.
On a
$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

— **Inégalité triangulaire.** On a l'inégalité de nombres réels (positifs) :
$$\big|\mathbb{E}(X)\big| \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big)$$

- **Remarque.** Soit X une VA. Alors la VA $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée (WHY ?).
- **Utilité.** La linéarité de l'espérance est très utile pour calculer l'espérance d'une variable dont on ne connaît pas la loi ou dont la loi a une expression compliquée, mais qu'on peut décomposer en somme de variables aléatoires dont on sait calculer l'espérance, qui sont le plus souvent des variables indicatrices.
- **Vocabulaire.** Soit X une VA à valeurs dans E. Soit $a \in E$.
On dit que X est *presque sûrement* égale à $a \in E$ lorsque $\mathbb{P}(X = a) = 1$. On écrit $X \overset{\text{p.s.}}{=} a$.

  Par exemple, une VA réelle est presque sûrement nulle lorsque $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

46 **Proposition (pour une variable aléatoire *réelle*).**

— **Positivité.** Soit X une variable aléatoire réelle.
On a
$$X \succcurlyeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) \geqslant 0$$

Si X est positive, alors son espérance est un réel positif.

— **Cas d'égalité.**
On a
$$\begin{cases} X \succcurlyeq 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad X \overset{\text{p.s.}}{=} 0$$

On dit, dans ce cas, que la variable X est *presque sûrement nulle*.

Une VA positive d'espérance nulle est presque sûrement nulle.

— **Croissance.** Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On a
$$X \preccurlyeq Y \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

- **Rappel.** La notation de Madame Tête $X \succcurlyeq 0$ signifie
$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geqslant 0$$
- **Remarque pour la Spé.** Si $\mathbb{E}(X) = 0$, on ne peut pas assurer que $X = 0$ (c'est-à-dire que X est constante égale à 0), car un événement peut être différent de $\varnothing$ et avoir une probabilité nulle. Il faudra attendre le contexte de la classe de Spé pour voir un tel exemple (penser au lancer infini d'une pièce, et considérer l'év$^{\text{t}}$ « obtenir que des PILE »).

47 sol → 39 **Question.** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au $k^{\text{ème}}$ tirage si la boule tirée porte le numéro k.
Déterminer le nombre moyen de rencontres.

Formule de transfert

48 preuve **Théorème de transfert.**
Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance qui est

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

- **Cas particuliers.** Pour $g : t \mapsto t$, quelle formule trouve-t-on ? Et pour $g : t \mapsto at + b$?
- **Utilité.** De manière générale, pour une VA Z, si on veut déterminer son espérance, il nous faut la loi de Z, c'est-à-dire les $\mathbb{P}(Z = y)$ pour tout z.

  Le théorème de transfert dit que l'on peut déterminer l'espérance de Z sans connaître la loi de Z.
  Voilà ce qu'il faut retenir du théorème de transfert:

  > « *Soit X une* VA *avec sa loi et g une fonction.*
  > *Alors on connaît l'espérance de $Z = g(X)$ sans nécessairement connaître sa loi.* »
- La formule s'applique en particulier quand X est un couple ou un n-uplet de variables aléatoires.

49 **Question.** Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Espérance d'un produit de variables indépendantes

50 preuve **Théorème.** Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

- **Refrain !** Sous couvert d'indépendance, l'espérance d'un produit est le produit des espérances.
- **Généralisation.** Évidemment, on a le même résultat pour n variables mutuellement indépendantes.

VI. Variance

On considère ici des VA à valeurs réelles.

- **Définition hors-programme, mais usuelle.**
  Le moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de X est l'espérance de la variable aléatoire X^r.
  Autrement dit :
  $$\text{moment}_r(X) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}(X^r) \overset{\text{transfert}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x^r\, \mathbb{P}(X = x)$$
  En particulier, le moment d'ordre 1 est l'espérance !

51 **Définition.** Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
La variance de X est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire *centrée* $X - \mathbb{E}(X)$:
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$$
La variance, c'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que la variable aléatoire X est *réduite*.

- **Refrain.** La variance est le moment *centré* d'ordre 2.
- L'expression $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est bien une variable aléatoire, car $\mathbb{E}(X)$ désigne ici la variable aléatoire constante égale à $\mathbb{E}(X)$.
- La variance est l'espérance du carré de la distance entre les valeurs de X et l'espérance de X. La variance mesure donc la **dispersion** de X autour de $\mathbb{E}(X)$.
- On aurait pu songer à prendre $\mathbb{E}\big(|X - \mathbb{E}(X)|\big)$ comme paramètre de dispersion, mais la valeur absolue donne des calculs beaucoup moins agréables que le carré.
- Lorsque l'on calcule une variance par un calcul direct en connaissant la loi, on utilise presque toujours la formule de Kœnig-Huygens et non la définition qui entraîne des calculs compliqués.

Propriétés

52 **Formule de Koenig-Huygens.** Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On a la formule suivante :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
La variance, c'est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne

et ses cousines germaines :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X(X+1)\big) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

53 **Proposition (propriétés de la variance).**
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

— **Réel positif.** On a toujours $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
Et on a
$$\mathbb{V}(X) = 0 \iff X \text{ est presque sûrement constante.}$$

— **Transformation affine.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}(X)$.

Lois usuelles

54 **Proposition (espérance et variance des lois usuelles).**

— **Uniforme.**

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ où $a \leqslant b \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

— **Bernoulli.**

Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$ où $p \in [0,1]$.

$$\mathbb{E}(X) = p$$
$$\mathbb{V}(X) = pq \text{ où } q = 1-p$$

— **Binomiale.**

Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$\mathbb{V}(X) = npq \text{ où } q = 1-p$$

Écart type

55 **Définition.** L'*écart-type* d'une variable aléatoire réelle X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

- On prend la racine carrée de la variance pour des raisons d'homogénéité ; ainsi, l'écart-type s'exprime dans les mêmes unités que les valeurs prises par la variable aléatoire.
- **Vocabulaire.** Une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$ est dite *centrée réduite*.

56 **Proposition (VA centrée réduite).**
Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{V}(X) \neq 0$.
La variable aléatoire

$$X^\star = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)$$

est une variable aléatoire centrée réduite, appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à X*.

VII. Covariance — Variance d'une somme

Définition

57 **Définition.**
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle *covariance* de X et Y, le réel noté $\mathrm{cov}(X,Y)$ défini par :

$$\mathrm{cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

- **Remarque.** Cette définition a un sens car $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)$ est une variable aléatoire réelle. C'est la variable aléatoire $g(X,Y)$, où $g:(x,y)\longmapsto \big(x-\mathbb{E}(X)\big)\big(y-\mathbb{E}(Y)\big)$.
- **Refrain !** La covariance est l'espérance du produit des variables centrées.

La covariance de deux VA est le moment *centré* d'ordre 1 de leur produit.

La variance d'une VA est le moment *centré* d'ordre 1 de son carré.

58 **Formule de Kœnig Huygens pour la covariance.**
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
La covariance de X et Y est donnée par la formule :

$$\mathrm{cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- **Calcul.** Comment calculer $\mathbb{E}(XY)$? ....
- **Remarque.** Si la variable X est constante égale à a, on a $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ puisqu'alors :

$$\mathbb{E}(XY) \;=\; \mathbb{E}(aY) \;=\; a\mathbb{E}(Y) \;=\; \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Propriétés de la covariance

59 **Proposition.**
Soit X, X', Y et Y' des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et λ un réel. On a :

(i) $\mathrm{cov}(X,X)=\mathbb{V}(X)\geqslant 0$

(ii) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$

(iii) $\mathrm{cov}(X+X',Y)=\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X',Y)$ $\qquad$ $\mathrm{cov}(\lambda X,Y)=\lambda\mathrm{cov}(X,Y)$

(iv) $\mathrm{cov}(X,Y+Y')=\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X,Y')$ $\qquad$ $\mathrm{cov}(X,\lambda Y)=\lambda\mathrm{cov}(X,Y)$

- **Remarque !** L'application $(X,Y)\longmapsto \mathrm{cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
L'application $(X,Y)\mapsto \mathrm{cov}(X,Y)$ n'est pas un produit scalaire, car $\mathbb{V}(X)=0$ n'implique pas $X=0$.

En effet, $\mathbb{V}(X)=0$ équivaut à X est presque sûrement constante.

- **Un calcul.** On peut retenir que :

$$\mathrm{cov}(X+a,Y+b) \;=\; \mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(a,Y)+\mathrm{cov}(X,b)+\mathrm{cov}(a,b) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{cov}(X,Y)$$

Variance d'une somme de variables aléatoires

60 **Proposition.** Soit X et Y des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On a :
$$\mathbb{V}(X+Y) \;=\; \mathbb{V}(X) \;+\; 2\operatorname{cov}(X,Y) \;+\; \mathbb{V}(Y)$$

- **Plus généralement.** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a
$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu Y) \quad = \quad \lambda^2 \mathbb{V}(X) \;+\; 2\lambda\mu \operatorname{cov}(X,Y) \;+\; \mu^2 \mathbb{V}(Y)$$

- **Cas général.** Par récurrence, on généralise la proposition précédente au cas de n variables aléatoires.
  Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
  La variance de la somme $X_1 + \cdots + X_n$ est donnée par:
$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \quad + \quad 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

- **Une inégalité de type Cauchy-Schwarz.**
  On peut démontrer (en suivant les idées de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que :
$$|\operatorname{cov}(X,Y)| \;\leqslant\; \sigma(X)\sigma(Y).$$

61 **Question.** Reprenons le problème des rencontres. Déterminer $\mathbb{V}(R)$ où R est la VA qui compte le nombre de rencontres.
sol → 40

Variables aléatoires décorrélées

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

62 **Proposition.** Si X et Y sont indépendantes, alors
$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

63 **Question.** Soit trois variables aléatoires mutuellement indépendantes X, Y, Z suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer $\operatorname{cov}(X+Y, Y+Z)$.
sol → 41

64 **Définition.** On dit que X et Y sont *décorrélées* lorsque $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$,

65 **Proposition.** Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

- **Attention.** La réciproque est fausse.

  Soit X suivant une loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = \mathbb{1}_{\{X=0\}}$.
  Commençons par remarquer que $XY = 0$ (WHY?), que $\mathbb{E}(X) = 0$ (WHY?) et que $\{Y = 1\} = \{X = 0\}$.

  Puis, constatons que l'on a les deux points suivants :
  — Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car :
$$\mathbb{P}\big(\{X=1\} \cap \underbrace{\{Y=1\}}_{\{X=0\}}\big) \;=\; 0 \quad \text{(WHY?)} \qquad \text{alors que} \quad \mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Y=1\big) \neq 0 \text{ (WHY?)}$$
  — Les variables X et Y sont décorrélées :
$$\operatorname{cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(\underbrace{XY}_{=0}) - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=0}\mathbb{E}(Y) \quad = 0$$

- **Cas des Bernoulli.**
Les variables de Bernoulli constituent une exception agréable : deux variables aléatoires décorrélées suivant une loi de Bernoulli sont indépendantes.

En effet, si X et Y sont deux variables de Bernoulli, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\
&= \mathbb{P}\big(XY=1\big)-\mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Y=1\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\big)-\mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Y=1\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, alors on a $\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\big)=\mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Y=1\big)$.
D'après ..., cela entraîne l'indépendance de X et Y.

66 preuve

Proposition. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathbb{P})$.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont deux à deux décorrélées, alors on a :

$$\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k).$$

- **Remarque.** Ce résultat s'applique en particulier si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ deux à deux indépendantes et *a fortiori* si elles sont mutuellement indépendantes. Cette formule montre donc l'intérêt de décomposer une variable aléatoire en somme de variables aléatoires indépendantes plus simples.

VIII. Inégalités probabilistes

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

67 **Proposition (inégalité de Markov).**
Si X est positive, alors :
$$\forall\, a > 0, \quad \mathbb{P}\big(X \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

68 **Proposition (inégalité de Bienaymé-Tchebychev).**
On a
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

- **Majoration.**
  L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est une *inégalité de concentration* : elle fournit une majoration de la probabilité que X s'écarte de son espérance.

- **Stricte versus Large.** On a l'inclusion $\{Y > \text{truc}\} \subset \{Y \geqslant \text{truc}\}$. Donc on a aussi :
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

- **Minoration.** Comme $\big\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big\}$ est l'événement contraire de $\big\{|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\big\}$, on a aussi :
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\Big) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

- **Mes refrains.**
  Markov, c'est du positif et du moment d'ordre 1.
  Bienaymé-Tchebychev, c'est du moment d'ordre 2.

69 **Question.** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Montrer que

$$(\spadesuit) \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

- **Commentaires sur cette question.**
  Considérons une suite de n épreuves indépendantes telle que, pour chaque épreuve, la probabilité qu'un certain événement A soit réalisé est p.
  Pour tout k, on note X_k la variable indicatrice de l'événement « A est réalisé à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
  On obtient des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathscr{B}(p)$.
  Alors la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ est égale à la fréquence avec laquelle l'événement A s'est réalisé parmi les n épreuves.
  La limite $(\spadesuit)$ dit que cette fréquence est proche de p pour les grandes valeurs de n.
  Ce résultat conforte l'intuition qui voit dans une probabilité une fréquence.
  Si, par exemple, on lance un dé un grand nombre de fois, 3 apparaîtra à peu près dans $\frac{1}{6}$ des lancers.

Variables aléatoires

preuve et éléments de correction

4

- L'application $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)$ et à valeurs dans $\{0,1\}$.
- On a, par définition, $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ donc $\mathbb{P}_X\left(X(\Omega)\right) = 1$.
- Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors :

$$\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \varnothing \text{ et } \{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}.$$

  Les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ étant incompatibles, on a, par additivité :

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B).$$

8

On considère l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme.
On a $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
Soit $k \in [\![2,12]\!]$. Déterminons $\mathbb{P}(X = k)$.
On a l'égalité d'événements :

$$\Big\{X = k\Big\} \; = \; \Big\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i + j = k\Big\}$$

On déroule des équivalences sur les indices

$$\begin{aligned}
(i,j) \in \{X = k\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 6 \\ 1 \leqslant j \leqslant 6 \\ i + j = k \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 6 \\ 1 \leqslant k - i \leqslant 6 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 6 \\ k - 6 \leqslant i \leqslant k - 1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \max(1, k-6) \leqslant i \leqslant \min(6, k-1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant k - 1 & \text{si } k \leqslant 7 \\ k - 6 \leqslant i \leqslant 6 & \text{si } k \geqslant 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on trouve :

$$\mathbb{P}(X = k) \; = \; \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{si } k \leqslant 7 \\[2ex] \dfrac{13-k}{36} & \text{si } k \geqslant 12 \end{cases}$$

Aubin Vandier (2024-2025) me dit que l'on peut écrire cela sans disjonction de cas via $\dfrac{6 - |7-k|}{36}$.

11

L'image de la variable aléatoire $g(X)$ est $g(X)(\Omega) = g(X(\Omega))$.

Pour tout $z \in g(X)(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\left\{g(X)=z\right\} &= \left\{\omega\in\Omega \mid g\big(X(\omega)\big)=z\right\}\\ &= \left\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in g^{-1}\big(\{z\}\big)\right\}\\ &= \left\{X\in g^{-1}\big(\{z\}\big)\right\}\\ &= \bigsqcup_{x\in g^{-1}(\{z\})}\left\{X=x\right\}.\end{aligned}$$

On en déduit, par additivité :

$$\mathbb{P}\big(g(X)=z\big) = \sum_{x\in g^{-1}(\{z\})}\mathbb{P}(X=x).$$

12

On considère l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme.

• **Loi de X.**
On a $X(\Omega) = [\![-5,5]\!]$.
Soit $k\in[\![-5,5]\!]$. Déterminons $\mathbb{P}(X=k)$.
On a l'égalité d'événements :

$$\left\{X=k\right\} = \left\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \mid i-j=k\right\}$$

On déroule des équivalences sur les indices

$$\begin{aligned}(i,j)\in\{X=k\} &\iff \begin{cases}1\leqslant i\leqslant 6\\ 1\leqslant j\leqslant 6\\ i-j=k\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}1\leqslant i\leqslant 6\\ 1\leqslant i-k\leqslant 6\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}1\leqslant i\leqslant 6\\ 1+k\leqslant i\leqslant 6+k\end{cases}\\ &\iff \max(1,1+k)\leqslant i\leqslant \min(6,6+k)\\ &\iff \begin{cases}1+k\leqslant i\leqslant 6 & \text{si } k\geqslant 0\\ 1\leqslant i\leqslant k+6 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on trouve :

$$\mathbb{P}(X=k) = \begin{cases}\dfrac{6-k}{36} & \text{si } k\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{6+k}{36} & \text{sinon}\end{cases}$$

Sans disjonction de cas, on peut écrire

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{6-|k|}{36}.$$

• **Loi de $|X|$.**

On a $|X|(\Omega) = [\![0,5]\!]$.
Soit $k \in [\![0,5]\!]$.
On a l'égalité d'événements

$$\{|X| = k\} = \begin{cases} \{X=0\} & \text{si } k=0 \\ \{X=-k\} \sqcup \{X=k\} & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}(|X| = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = \dfrac{1}{6} & \text{si } k=0 \\ \mathbb{P}(X=-k) + \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{6-k}{18} & \text{sinon} \end{cases}$$

13

L'ensemble des valeurs prises par $g(X)$ et $g(Y)$ est $g\big(X(\Omega)\big)$, et d'après ...... on a, pour tout $z \in g\big(X(\Omega)\big)$:

$$\mathbb{P}(g(X) = z) = \sum_{x \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(Y) = z).$$

21

Montrons la première formule.
Cela résulte de la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$.

22

1. *Tirage avec remise.*
   Prenons $\Omega = [\![1,3]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On a $\operatorname{card}\Omega = 9$.
   Loi conjointe.
   Soit $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$.
   On a l'égalité d'événements :
   $$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \{(i,j)\}$$
   Appliquons $\mathbb{P}$:
   $$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{\operatorname{card}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{1}{9}.$$
   Première loi marginale.
   Soit $i \in [\![1,3]\!]$. On a
   $$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$
   Bilan : $X \sim \mathscr{U}([\![1,3]\!])$.

   Deuxième loi marginale. On obtient le même résultat pour Y, c'est-à-dire $Y \sim \mathscr{U}([\![1,3]\!])$.

2. *Tirage sans remise.*
Les deux boules tirées sont distinctes.
Prenons $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \mid i \neq j\}$ muni de la probabilité uniforme. On a $\operatorname{card}\Omega = 6$.
Soit $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1,3]\!]^2$. On a l'égalité d'événements

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i = j \\ \{(i,j)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{6} & \text{sinon} \end{cases}$$

Première loi marginale.
Soit $i \in [\![1,3]\!]$. On a

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Bilan : $X \sim \mathscr{U}([\![1,3]\!])$.

Deuxième loi marginale. On obtient le même résultat pour Y, c'est-à-dire $Y \sim \mathscr{U}([\![1,3]\!])$.

Dans les deux cas, les variables X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$, mais le couple (X,Y) n'a pas la même loi. Ainsi les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

24

Fixons $k \in [\![1,6]\!]$. On a

$$\mathbb{P}_A(X = k) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \qquad \text{avec } \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

On a l'égalité d'événements :

$$\{X = k\} \cap A = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \text{ est impair} \\ \{X = k\} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{P}(\{X = k\} \cap A) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{1}{6} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Bilan :

$$\mathbb{P}_A(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

BILAN : la loi de X sachant A est la loi uniforme sur $\{2,4,6\}$.

27

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons X et Y indépendantes.
Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ dans la définition de l'indépendance, d'où :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis donc les sous-ensembles $A' = A \cap X(\Omega)$ et $B' = B \cap Y(\Omega)$ aussi.

On a :

$$(\spadesuit) \qquad \{X \in A\} = \bigsqcup_{x \in A'} \{X = x\} \quad \text{et} \quad \{Y \in B\} = \bigsqcup_{y \in B'} \{Y = y\}.$$

D'où (lois de Morgan)

$$\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigsqcup_{(x,y) \in A' \times B'} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) &= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) && \text{additivité de } \mathbb{P} \\
&= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}\big(X = x\big)\mathbb{P}\big(Y = y\big) && \text{hypothèse} \\
&= \left(\sum_{x \in A'} \mathbb{P}\big(X = x\big)\right)\left(\sum_{y \in B'} \mathbb{P}\big(Y = y\big)\right) && \text{distributivité } + / \times \\
&= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) && \text{additivité de } \mathbb{P} \text{ sur } (\spadesuit)
\end{aligned}$$

Donc les variables X et Y sont indépendantes.

28

— Supposons (i).
Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}\big(Y = y\big) \neq 0$. Montrons que $\forall\, x \in X(\Omega),\quad \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(X = x\big) = \mathbb{P}(X = x)$.
Soit $x \in X(\Omega)$. On a

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(X = x\big) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)} \overset{\text{WHY}}{=} \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x).$$

— Supposons (ii).
Montrons que X et Y sont indépendantes à l'aide de la caractérisation 27.
Soit $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

- — Si $\mathbb{P}(Y = y) = 0$, alors $\{Y = y\}$ est indépendant de $\{X = x\}$ (un événement négligeable est indépendant de tout événement).
- — Sinon :
$$\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(X = x\big)\mathbb{P}\big(Y = y\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}\big(Y = y\big).$$

29

— Si les variables X et Y sont indépendantes, il résulte de la définition qu'en particulier les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants.

— Supposons que les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ sont indépendants.
D'après le premier épisode de proba, les événements :

$$\overline{\{X=1\}} \text{ et } \{Y=1\}, \qquad \{X=1\} \text{ et } \overline{\{Y=1\}}, \qquad \overline{\{X=1\}} \text{ et } \overline{\{Y=1\}}$$

sont indépendants.
Or, on a l'égalité $\overline{\{X=1\}} = \{X=0\}$. Ainsi que $\overline{\{Y=1\}} = \{Y=0\}$. Donc les événements :

$$\{X=0\} \text{ et } \{Y=1\}, \qquad \{X=1\} \text{ et } \{Y=0\}, \qquad \{X=0\} \text{ et } \{Y=0\}$$

sont indépendants.
Pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X=x\}$ et $\{Y=y\}$ sont indépendants, donc les variables X et Y sont indépendantes.

30

Disons que $\varphi(X)$ est à valeurs dans E et $\psi(Y)$ dans F.
Supposons X et Y indépendantes.
Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{\varphi(X) \in A\} \cap \{\psi(Y) \in B\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X \in \varphi^{-1}(A)\} \cap \{Y \in \psi^{-1}(B)\}\big) && \text{par définition} \\
&= \mathbb{P}\big(X \in \varphi^{-1}(A)\big)\, \mathbb{P}\big(Y \in \psi^{-1}(B)\big) && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \mathbb{P}\big(\varphi(X) \in A\big)\, \mathbb{P}\big(\psi(Y) \in B\big) && \text{par définition}
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes.

32

On a $(X+Y)(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$.
Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$. On a

$$\{X+Y=k\} = \bigsqcup_{\substack{i+j=k \\ (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} \{X=i\} \cap \{Y=j\}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$ et indépendance de X et Y, on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$$

Comme X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{\substack{i+j=k \\ (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i+j=k \\ (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} 1
\end{aligned}$$

Reste à déterminer le nombre de couples (i,j) dans la somme !

On déroule des équivalences sur les indices

$$\begin{aligned}
(i, k-i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k-i \leqslant n \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n \\ k-n \leqslant i \leqslant k-1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \max(1, k-n) \leqslant i \leqslant \min(n, k-1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant k-1 & \text{si } k \leqslant n+1 \\ k-n \leqslant i \leqslant n & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit finalement que :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) \;=\; \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leqslant n+1 \\[2ex] \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

34

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

En appliquant la définition de l'indépendance avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i = \{x_i\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Montrons que

$$\forall\, (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(E_1) \times \cdots \times \mathscr{P}(E_n), \qquad \mathbb{P}\Big(\{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}\Big) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $A_i \in \mathscr{P}(E_i)$.

On pose $A'_i = A_i \cap X_i(\Omega)$ de sorte que :

$$(\star) \qquad \{X_i \in A_i\} \;=\; \{X_i \in A'_i\} \;=\; \bigsqcup_{x_i \in A'_i} \{X_i = x_i\}.$$

Par intersection :

$$\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \{X_i \in A_i\} \;=\; \bigsqcup_{(x_1, \ldots, x_n) \in B} \left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \{X_i = x_i\} \right) \qquad \text{où } B = A'_1 \times \cdots \times A'_n$$

Remarque. *On vient d'utiliser ce genre d'égalité*

$$(C_1 \sqcup C_2) \cap (D_1 \sqcup D_2) \;=\; (C_1 \sqcup D_1) \cap (C_1 \sqcup D_2) \cap (C_2 \sqcup D_1) \cap (C_2 \sqcup D_2)$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}\{X_i \in A_i\}\right) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}\{X_i = x_i\}\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B} \left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right)\right) && \text{par hypothèse} \\
&= \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{x_i\in A'_i} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right)\right) && \text{cf. explications ci-dessous} \\
&= \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}\left(X_i \in A_i\right) && \text{par additivité de } \mathbb{P} \text{ sur l'égalité } (\star)
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont donc mutuellement indépendantes.

Explications ! On rappelle la formule suivante

Formule pour 2 **familles.**

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de réels indexées par deux ensembles finis I et J.
Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big).$$

Formule généralisée à n familles.

Soit $(a_{i_1})_{i_1\in I_1}, \ldots, (a_{i_n})_{i_n\in I_n}$ n familles de réels indexées par n ensembles finis $I_1, \ldots, I_n$.
Alors, en notant B le big produit cartésien $B = I_1\times\cdots\times I_n$, on a

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in B} a_{i_1}\cdots a_{i_n} = \Big(\sum_{i_1\in I_1} a_{i_1}\Big)\times\cdots\times\Big(\sum_{i_n\in I_n} a_{i_n}\Big).$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in B}\Big(\prod_{k\in[\![1,n]\!]} a_{i_k}\Big) = \prod_{k\in[\![1,n]\!]}\Big(\sum_{i_k\in I_k} a_{i_k}\Big)$$

Formule généralisée à n familles avec d'autres notations.

Soit $(p_{x_1})_{x_1\in A_1}, \ldots, (p_{x_n})_{x_n\in A_n}$ n familles de réels indexées par n ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$.
Alors, en notant B le big produit cartésien $B = A_1\times\cdots\times A_n$, on a

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} p_{x_1}\cdots p_{x_n} = \Big(\sum_{x_1\in A_1} p_{x_1}\Big)\times\cdots\times\Big(\sum_{x_n\in A_n} p_{x_n}\Big).$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in B}\Big(\prod_{i\in[\![1,n]\!]} p_{x_i}\Big) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]}\Big(\sum_{x_i\in I_i} p_{x_i}\Big)$$

36

Supposons que X_i est à valeurs dans E_i.

— Montrons que les **deux** variables aléatoires $Y = (X_1, \ldots, X_p)$ et $Z = (X_{p+1}, \ldots, X_n)$, (chacune étant des k-uplets de VA donc une VA), sont indépendantes.
Soit $y \in E_1\times\cdots\times E_p$ et $z\in E_{p+1}\times\cdots\times E_n$.
Montrons que $\mathbb{P}\big(\{Y=y\}\cap\{Z=z\}\big) = \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(Z=z)$.
L'élément y s'écrit $(x_1,\ldots,x_p)$ et l'élément z s'écrit $(x_{p+1},\ldots,x_n)$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y=y\}\cap\{Z=z\}\big) &= \mathbb{P}\big(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\big) && \text{définition}\\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\big(X_k=x_k\big) && \text{indépendance des } X_k\\
&= \prod_{k=1}^{p}\mathbb{P}(X_k=x_k)\prod_{k=p+1}^{n}\mathbb{P}(X_k=x_k) && \text{paquets}\\
&= \mathbb{P}(Y=y)\,\mathbb{P}(Z=z) && \text{cf. ci-après}
\end{aligned}$$

Justification. Une sous-famille d'une famille indépendante est indépendante. Donc $(X_1,\ldots,X_p)$ est une famille indépendante. Ainsi

$$\prod_{k=1}^{p}\mathbb{P}(X_k=x_k) = \mathbb{P}(\underbrace{X_1=x_1,\ldots,X_p=x_p}_{\{Y=y\}})$$

Idem pour $(X_{p+1},\ldots,X_n)$.

— On en déduit que les **deux** VA $\varphi(X_1,\ldots,X_p)$ et $\psi(X_{p+1},\ldots,X_n)$ sont indépendantes, d'après 30.

37

Montrons que $(X_1,\dots,X_n) \sim (Y_1,\dots,Y_n)$.
Soit $(x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((X_1,\dots,X_n)=(x_1,\dots,x_n)\big) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i=x_i) && \text{par indépendance des } X_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i=x_i) && \text{car } X_i \sim Y_i \\
&= \mathbb{P}\left((Y_1,\dots,Y_n)=(x_1,\dots,x_n)\right) && \text{par indépendance des } Y_i
\end{aligned}$$

Les deux variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ ont même loi.
D'après 13, on en déduit qu'il en est de même de $g(X_1,\dots,X_n)$ et $g(Y_1,\dots,Y_n)$.

Pour le dernier point, il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $g:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1+\cdots+x_n$.

47

Il s'agit de calculer l'espérance de la variable R égale au nombre de rencontres.
Pour tout k, on note X_k la variable qui prend la valeur 1 s'il y a rencontre au $k^{\text{ème}}$ tirage, et 0 sinon.
On a donc

$$R = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Par linéarité, on a

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

La variable aléatoire X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$\mathbb{P}(X_k=1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

car il y a $n!$ tirages possibles et $(n-1)!$ tirages pour lesquels la boule k est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Donc

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}$$

On a donc

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = n\frac{1}{n} = 1.$$

48

Pour alléger les notations, posons $Z = g(X)$.
Partons de la définition alternative de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{\omega\in\Omega} g\big(X(\omega)\big)\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)$$

Maintenant, utilisons le fait que

$$\Omega = \bigsqcup_{x\in X(\Omega)} [X=x]$$

Ainsi, la somme simple $\sum_{\omega\in\Omega} \text{truc}_\omega$ vaut la somme double $\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in[X=x]} \text{truc}_\omega$.

Reprenons le calcul avec cette information.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in[X=x]} g\big(X(\omega)\big)\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in[X=x]} g(x)\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} g(x) \underbrace{\sum_{\omega\in[X=x]} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)}_{\mathbb{P}(X=x)} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(X=x)
\end{aligned}$$

50

Pour calculer $\mathbb{E}(XY)$, On remarque que $XY = g(Z)$ où $Z = (X,Y)$ et $g : (x,y) \longmapsto xy$.
En appliquant la formule de transfert, on obtient :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(g(Z)) = \sum_{z\in Z(\Omega)} g(z)\mathbb{P}(Z=z) = \sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} g(x,y)\,\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big).$$

On peut même changer l'ensemble d'indexation de la somme en $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
En effet, si $(x,y)\in\big(X(\Omega)\times Y(\Omega)\big)\setminus Z(\Omega)$, alors $\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)=0$.
D'où

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big).$$

Utilisons à présent l'indépendance de X et Y.
On obtient

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Cette somme double, devient le produit de deux sommes simples car « les variables sont bien séparées » :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\; y\mathbb{P}(Y=y) = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y)\right)$$

61

On reprend la décomposition $R = X_1+\cdots+X_n$, où X_k est la variable indicatrice de l'événement « il y a une rencontre au $k^{\text{ème}}$ tirage ». On a

$$\mathbb{V}(R) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

— Chaque X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et donc de variance :

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}.$$

— Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. Déterminons $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.
D'après Koenig-Huygens, on a

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$$

Déterminons $\mathbb{E}(X_iX_j)$. On remarque que X_iX_j est une VA de Bernoulli (le produit de deux Bernoulli est une Bernoulli).
Donc :

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}\big(X_iX_j = 1\big) = \mathbb{P}\big(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big)$$

L'événement $\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}$ est réalisé s'il y a rencontre aux $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ tirages.
On obtient donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Déterminons maintenant $\mathbb{V}(R)$.
Appliquons alors ...., en remarquant que toutes les variances intervenant sont égales, ainsi que toutes les covariances, et qu'il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ termes dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(R) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\ &= n\mathbb{V}(X_1) + 2\frac{n(n-1)}{2}\operatorname{cov}(X_1, X_2)\end{aligned}$$

et, après calculs et simplifications, $\mathbb{V}(X) = 1$.

63

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\operatorname{cov}(X+Y, Y+Z) = \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Y) + \operatorname{cov}(Y,Z).$$

On a $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X,Z) = \operatorname{cov}(Y,Z) = 0$ par indépendance deux à deux des variables aléatoires.
De plus, $\operatorname{cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(Y) = p(1-p)$.
D'où

$$\operatorname{cov}(X+Y,\ Y+Z) = p(1-p).$$

66

On a

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes donc $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$, d'où :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k).$$