Fonctions de deux variables

exercices

Mini topologie

101 Ouvert

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Illustrer votre réponse.

(i) $\mathbb{R}^2$

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(iii) $]0,1[^2$

(iv) $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y > \cos(x)\Big\}$

102 Disque fermé

Soit $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que la partie suivante (appelée *disque fermé* de centre p et de rayon r) n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \big\{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z-p\| \leqslant r\big\}.$$

Calcul diff !

103 Calculs

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{xy^2} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\ln(xy) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x}\sin(x^2+y^2) \end{array}$$

104 Existence d'une dérivée selon tout vecteur et pourtant...

On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f admet en tout point des dérivées selon tout vecteur.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

105 Again

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t^2,t^3)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

106 Calculs

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et, suivant le cas, calculer leur dérivée ou leurs dérivées partielles en fonction des dérivées partielles de f.

$u_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$

$u_2 : x \mapsto f(x,x)$

$u_3 : (x,y) \mapsto f\big(y, f(x,x)\big)$

$u_4 : x \mapsto f\big(x, f(x,x)\big)$

107 Gradient nul

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\nabla f = 0$.
   Montrer que f est constante, en montrant que $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a,b) = f(0,0)$.
2. Donner un exemple d'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de fonction $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ non constante telle que $\nabla f = 0$.

108 Équation fonctionnelle

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \iff \qquad \exists\, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = h(x).$$

109 Coordonnées polaires

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{array}$$

1. Calculer les dérivées partielles de g, que l'on notera $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, en fonction de celles de f.
2. On dit que f est *radiale* si elle est constante sur tout cercle centré en 0.
   Montrer que cela se produit si, et seulement si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - b\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$

110 Fonction homogène

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$.
On dit que f est homogène de degré r lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t > 0,\ f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2. Montrer que f est homogène de degré r si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$

111 Une équation fonctionnelle

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \iff \qquad \exists\, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = h(2x+y).$$

   On pourra considérer la fonction $g : (x,y) \mapsto f(x+y, x-2y)$.

2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$(E) \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ - \ 2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \ = \ a.$$

112 Changement de variables

En effectuant le changement de variables $(x,y) = \left(u, \dfrac{u^2}{2} + v\right)$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y$, avec la condition aux limites $f(0,y) = y$.

Extrema

113 Again

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ suivantes :

$f_1 : (x,y) \mapsto e^{3x}\, y^2 + e^x\, y$

$f_2 : (x,y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$

$f_3 : (x,y) \mapsto \exp(x \text{ Arctan}(y))$

$f_4 : (x,y) \mapsto \cos(x) + y^2$

114 Une fonction

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto x\, e^y + y\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer ses points critiques.
2. En étudiant $x \mapsto f(x,-1)$ et $x \mapsto f(x,x)$, montrer que f n'a pas d'extremum local.

115 Avec le gradient

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \langle \nabla f(a) - \nabla f(b) \mid a - b \rangle \;\geqslant\; 0.$$

Montrer que tout point critique de f est un minimum.

116 Une dernière fonction

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (y-x^2)(y-2x^2) \end{array}$

1. Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de f, et que f n'admet pas en ce point de maximum local.
2. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(tv)$ admet un minimum local en 0.
3. En examinant le comportement de f le long d'une parabole bien choisie, montrer que f n'admet pas d'extremum global en $(0,0)$.

117 Petit jeu

Associer à chaque surface, la courbe de niveau et l'expression correspondantes.

$$f_1 : (x,y) \mapsto \cos(x+y)$$

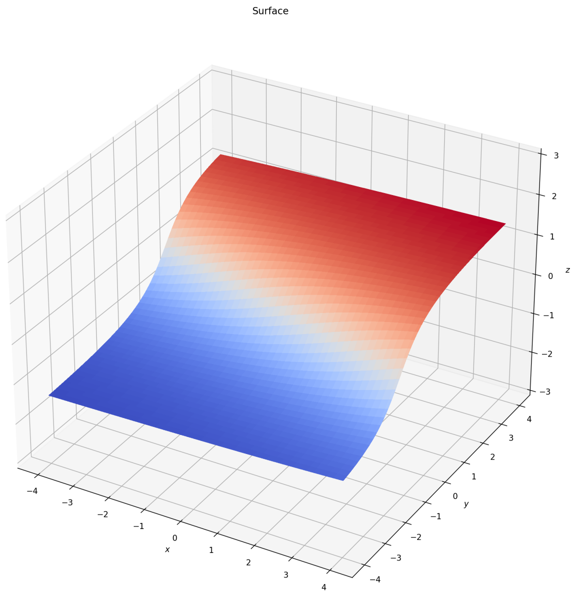
$$f_2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\left(\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right) x$$

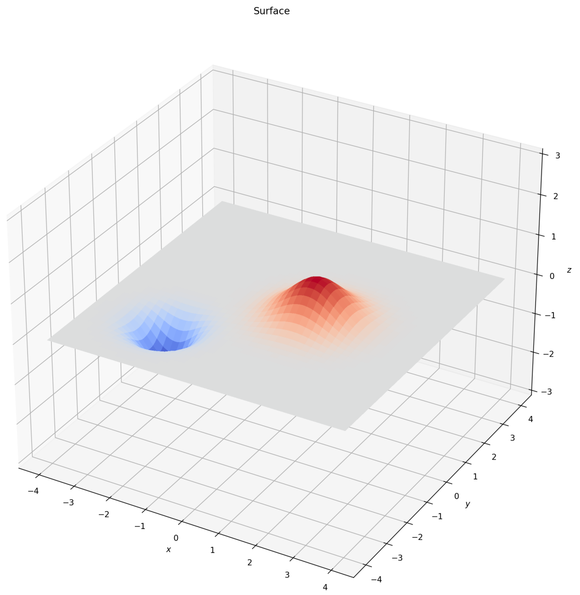
$$f_3 : (x,y) \mapsto e^{-\left((x-1)^2+y^2\right)} - e^{-2\left((x+2)^2+(y+2)^2\right)}$$

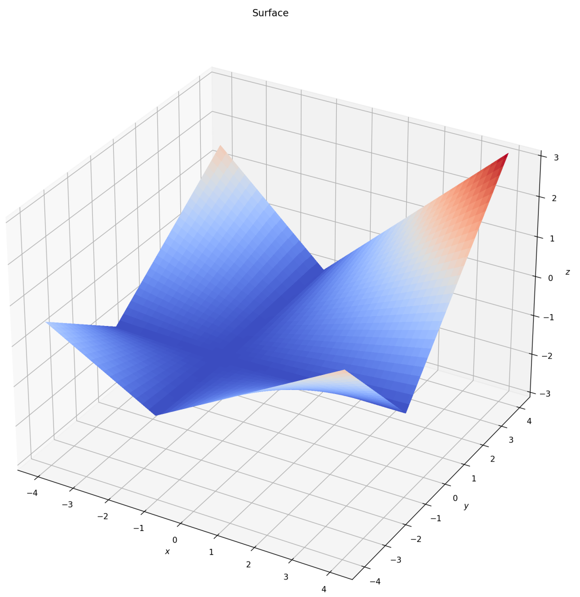
$$f_4 : (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

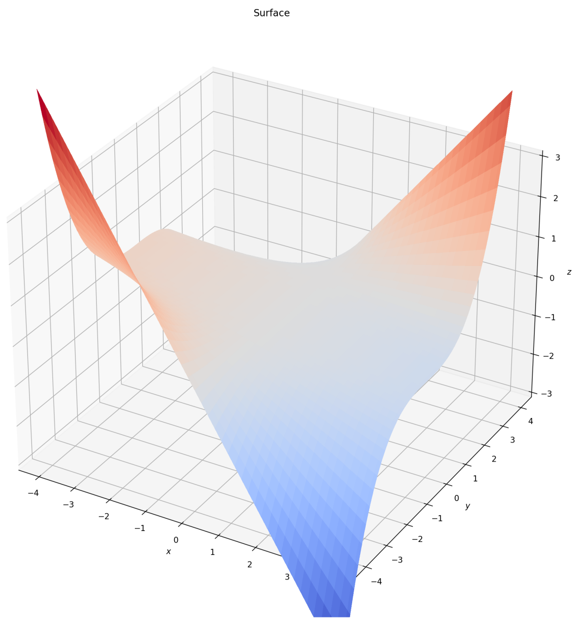
$$f_5 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}|y+1||x+1| - 1$$

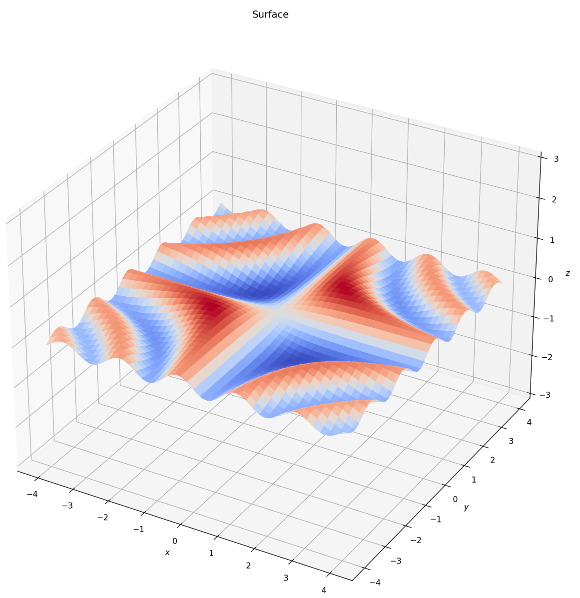
$$f_6 : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{3} + y\right)$$

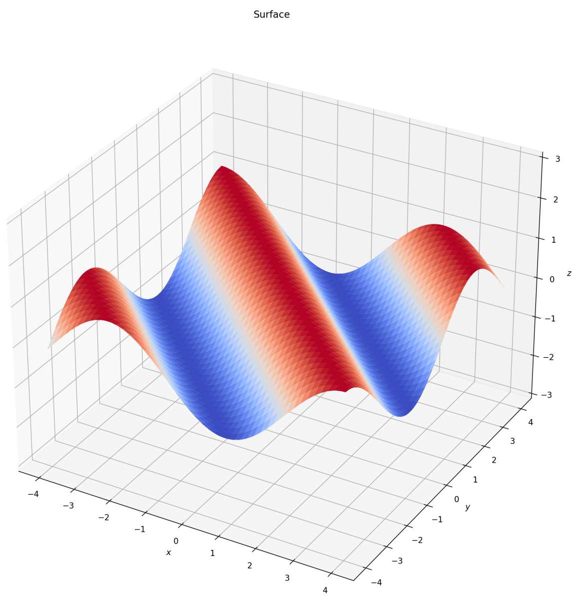

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

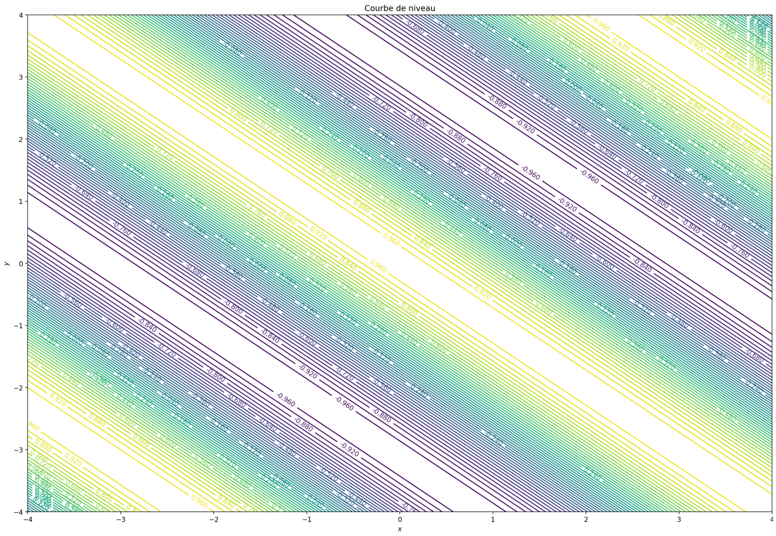

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

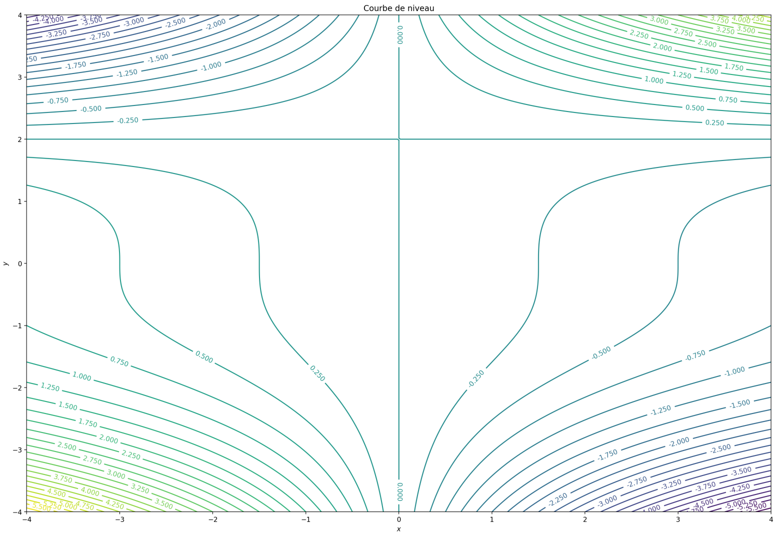

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

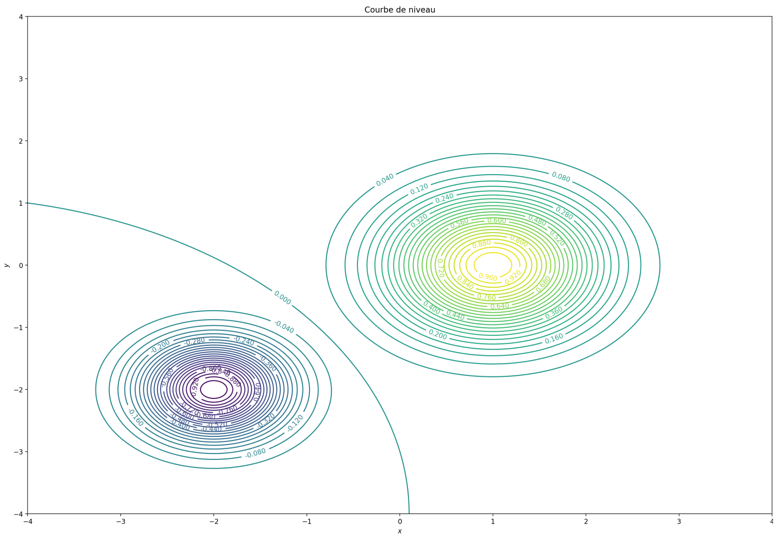

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

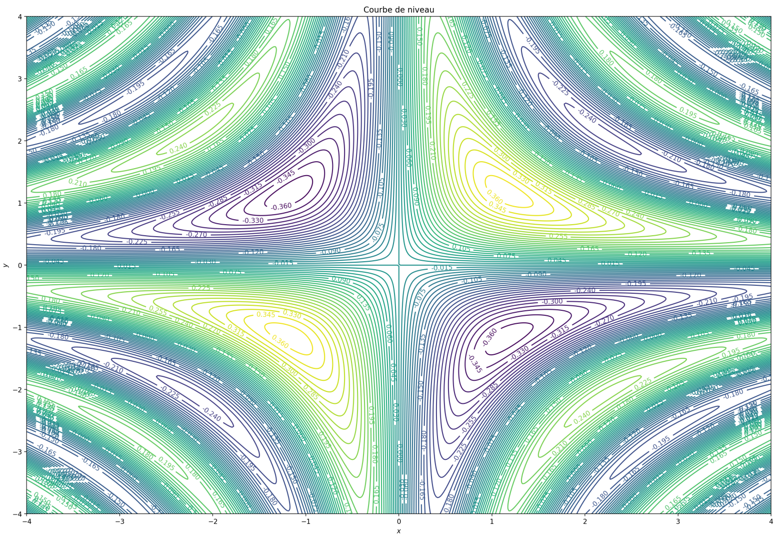

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

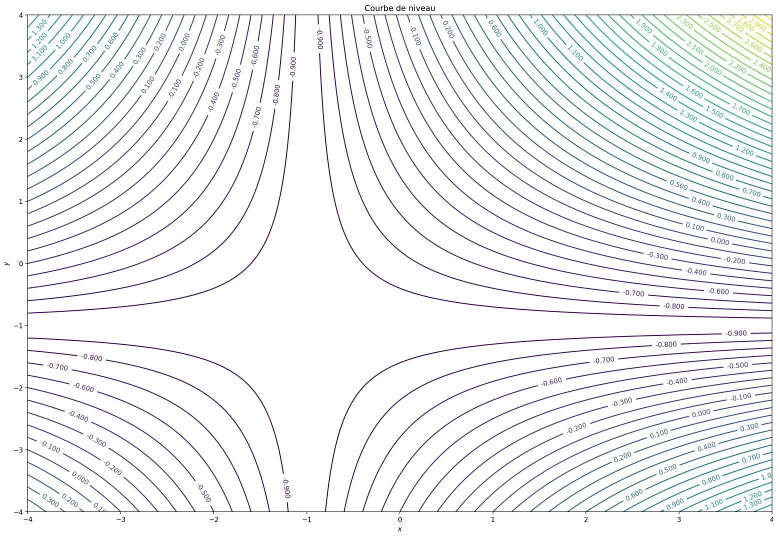

Surface
x
y
z
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−3 −2 −1 0 1 2 3

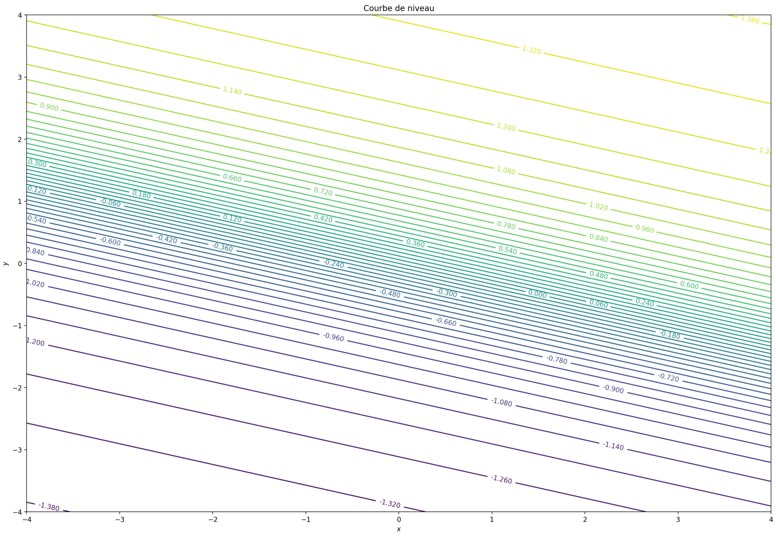

Courbe de niveau


Courbe de niveau


Courbe de niveau


Courbe de niveau


Courbe de niveau


Courbe de niveau

Fonctions de deux variables

corrigés

1. Quel que soit $p \in \mathbb{R}^2$, on a évidemment $D(p,1) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Soit $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $r = \|p\| > 0$.
   On a $(0,0) \notin D(p,r)$, car $\|p-(0,0)\| = r$. Cela montre $D(p,r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Soit $p = (a,b) \in \,]0,1[^2$; posons $r = \min\{a, 1-a, b, 1-b\} > 0$.
   Montrons $D(p,r) \subset \,]0,1[^2$. Soit $z = (x,y) \in D(p,r)$.
   On a $(x-a)^2 \leqslant (x-a)^2 + (y-b)^2 = \|(x,y)-(a,b)\|^2 < r^2$, donc $|x-a| < r$ par stricte croissance de la fonction racine carré, ce qui donne $a - r < x < a + r$.
   En particulier, les inégalités $r \leqslant a$ et $r \leqslant 1-a$ montrent :
   $$0 \leqslant a - r < x < a + r \leqslant 1,$$
   ce qui donne $x \in \,]0,1[$. On montre de la même façon $y \in \,]0,1[$, ce qui donne $z \in \,]0,1[^2$, et conclut.
4. Notons $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} y > \cos(x)\}$; soit $p = (a,b) \in U$.
   Notons $\epsilon = \frac{b-\cos(a)}{2} > 0$. Par continuité de la fonction cosinus, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \Big(\big|x-a\big| \leqslant \eta \implies \Big|\cos(x) - \cos(a)\Big| \leqslant \epsilon \Big).$$
   Soit $r = \min\{\eta, \epsilon\} > 0$. Montrons $D(p,r) \subset U$.
   Soit $z = (x,y) \in D(p,r)$.
   Comme dans la question précédente, on obtient :
   $$|x-a| < r \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |y-b| < r \leqslant \epsilon.$$
   En particulier, la première inégalité entraîne que $\Big|\cos(x) - \cos(a)\Big| \leqslant \epsilon$, ce qui donne :
   $$y - \cos(x) > (b-\epsilon) - (\cos(a)+\epsilon) = \big(b - \cos(a)\big) - 2\epsilon \geqslant 0,$$
   et montre $z \in U$.

102

Considérons $q = (a + r, b)$. Comme $\|q - p\| = r$, on a $q \in A$. On va montrer qu'aucun disque ouvert centré en q n'est inclus dans A.
Soit $s > 0$.
Considérons le point $z = (a + r + s/2, b)$.

— Comme $\|z - q\| = s/2 < s$, on a bien $z \in D(q, s)$.

— Comme $\|z - p\| = r + s/2 > r$, on a $z \notin A$.

Cela montre que le disque $D(q, s)$ n'est pas inclus dans A, et conclut.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On va montrer $f(a,b) = f(0,0)$, ce qui conclura.
   D'après la première règle de la chaîne, la fonction $\phi : t \mapsto f(ta, tb)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \phi'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(ta,tb)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(ta,tb)\, b$$
   Comme le gradient est nul par hypothèse, on a donc $\phi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Donc ϕ est constante.
   En particulier, $\phi(1) = \phi(0)$, ce qui montre $f(a,b) = f(0,0)$.
2. Considérons $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et
   $$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 9 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array}$$
   Il est clair que la fonction f n'est pas constante.
   Pourtant, pour tout $p = (a,b) \in U$, la fonction f est constante sur un disque centré en p, ce qui montre que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \;=\; 0 \quad \text{ et } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$$
   c'est-à-dire $\nabla f(p) = 0$.

111

1. Nous allons raisonner par double implication, mais avant cela, faisons deux remarques préliminaires. Considérons

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x+y, x-2y). \end{array}$$

• La deuxième règle de la chaîne (appliquée aux fonctions affines $\phi : (x,y) \mapsto x+y$ et $\psi : (x,y) \mapsto x-2y$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$) montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big)\,\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big)\,\frac{\partial \psi}{\partial y}(a,b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big) - 2\frac{\partial f}{\partial y}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big) \end{aligned}$$

• Remarquons que pour $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, on a, en résolvant un système linéaire, l'équivalence :

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-2y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{u-v}{3} \end{cases}$$

Cela nous permet d'exprimer f en fonction de g :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g\left(\frac{2x+y}{3}, \frac{x-y}{3}\right).$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
C'est une égalités de fonctions, qui dit que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \; - \; 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

En particulier pour $(x,y) = \big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big)$, on a

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big) - 2\frac{\partial f}{\partial y}\big(\phi(a,b),\psi(a,b)\big) = 0$$

Avec le calcul précédent, on a donc

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$$

Autrement dit, la fonction $\frac{\partial g}{\partial y}$ est nulle.
D'après l'exercice 108, on peut trouver une fonction $h_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = h_1(u)$$

En posant $h : t \mapsto h_1(t/3)$ (qui reste évidemment de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g\left(\frac{2x+y}{3}, \frac{x-y}{3}\right) = h_1\Big(\frac{2x+y}{3}\Big) = h(2x+y).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = h(2x+y)$.
On remarque que $f = h \circ \widetilde{f}$ où $\widetilde{f} : (x,y) \mapsto 2x+y$.
À l'aide de la dérivée d'une composée (règle de la chaîne numéro 0) :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \;=\; h'(2a+b) \times \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(a,b) \\[2ex] \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \;=\; h'(2a+b) \times \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(a,b) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \; - \; 2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \;=\; h'(2a+b) \times 2 \; - \; 2\Big(h'(2a+b) \times 1\Big) \;=\; 0.$$

2. On va utiliser le principe général suivant.
   Notons E une équation linéaire avec second membre, d'inconnue f.
   On note E_H l'équation homogène associée et on suppose que l'on connaît une solution particulière f_0 de E.
   On a alors l'équivalence :

$$f \textit{ est solution de } E \iff f - f_0 \textit{ est solution de } E_H.$$

La fonction $f_0 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b) = a \quad \text{ et } \quad \frac{\partial f_0}{\partial y}(a,b) = 0,$$

donc f_0 vérifie l'équation (E).
D'après le principe général, les solutions sont les fonctions $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + h(2x+y)$ où h décrit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.