Chapitre 19 : Mouvement d'un solide

I) Cinématique du solide

I.1) Translation

Vitesse d'un point du solide $\vec{v}(M) = \vec{v}(G)$ indépendant du point M du solide

Cas particuliers : translation rectiligne

translation circulaire

I.2) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Vitesse d'un point du solide $\vec{v}(M) = r\omega\vec{u_\theta} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

II) Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Moment d'inertie $J_\Delta = \int_{M\in S} r^2 dm$ ($r = HM$ = distance entre M et Δ)

Moment cinétique $L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$

III) Moment des actions extérieures sur un solide

III.1) Couples

- Couple de deux forces $\{\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}\ ,\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_1}, \vec{F_2}) \neq 0\}$
- Généralisation $\{\sum \vec{F_i} = \vec{F} = \vec{0}\ ,\ \mathcal{M}_\Delta = \Gamma \neq 0\}$
- Couple de torsion $\Gamma = -C\theta$ où θ = angle de torsion et C = cste de torsion
- Couple moteur et couple de freinage { moteur si Γ et $\dot{\theta}$ de même signe ; freinage sinon.

III.2) Liaison pivot

1 seul ddl θ. Δ, $\dot{\theta}$

Pivot idéal : sans frottts $\{\mathcal{M}_{\Delta\,\text{liaison}} = 0\ ;\ \mathcal{P}_{\text{liaison}} = 0\}$

IV) Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe de R galiléen

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\Delta,ext}$$

V) Applications

V.1) Le pendule de torsion

- Equation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$
- Intégrale première du mouvement $\underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}C\theta^2}_{E_p} = E_m = \text{cste}$

V.2) Le pendule pesant

- Equation du mouvement. $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_\Delta}}$ $l = OG$
- Cas des petites oscillations $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$
- Intégrale première du mouvement $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + E_p = E_m = \text{cste}$ avec $E_p = mgl(1-\cos\theta)$
- Etude qualitative du mouvement (E_p, états lié/libre)

VI) Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation

VI.1) Énergie cinétique d'un solide en rotation

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

VI.2) Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

couple de torsion $\Gamma = -C\theta \rightarrow E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$

$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta\dot{\theta}$ et $\delta W(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta d\theta$

VI.3) Théorème l'énergie cinétique pour un solide

en rotation autour de Δ fixe dans R : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} = \mathcal{M}_{\Delta ext}\dot{\theta}$

VI.4) Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

a) Bilan énergétique du tabouret d'inertie $\Delta E_c = W_{ext} + W_{int} = 0 + W_{int} \neq 0$ (et $L_\Delta = J\omega = \text{cste}$)

b) Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$ ⚠ $\mathcal{P}_{int} \neq 0$ pour un système déformable a priori.

$\mathcal{P}_{int} = 0$ pour un système indéformable donc un solide

$\mathcal{P}_{int}$ indépendant du référentiel.

VII) Exercices