

Epreuve de fin d'année 2022

Première composition de physique Lundi 20/06/2022 - 4h Classes de PCSI

- *L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.*
- *Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif.*
- *Aucun document n'est autorisé.*
- *Cette composition est constituée de deux problèmes **indépendants**.*
- *Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la notation.
En particulier, on prendra soin de bien exprimer les résultats littéraux en fonction des données du problème avant toute application numérique.*
- *Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiatives et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.*

Conseil général : on prendra soin de reprendre l'ensemble du sujet à l'aide de la correction si nécessaire avant la rentrée 2022 en deuxième année.

La microscopie : de Van Leeuwenhoek à celle à deux photons (librement inspiré du sujet Mines ponts PC -2020)

Afin de contrôler la qualité des tissages, Antoni de Van Leeuwenhoek (1632-1723) apprenti drapier aux Pays Bas, inventa le premier microscope à fort grossissement vers 1668. Cet instrument permit, grâce à la curiosité de son inventeur de découvrir l'existence d'un monde vivant vers 1668 et en particulier d'observer les protozoaires et les spermatozoïdes.

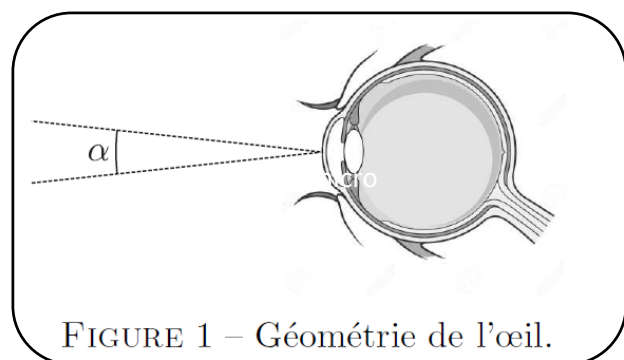
Dans une première partie de ce sujet, nous préciserons la limite de résolution de l'œil afin d'apprécier ensuite dans la partie II, l'apport du microscope de Van Leeuwenhoek pour réussir à voir de petits détails.

Plus récemment, l'utilisation de lasers pulsés comme source de lumière pour les microscopes permet à la fois de nouveaux contrastes spécifiques des différents constituant d'un tissu biologique, mais également une imagerie tridimensionnelle. La partie III propose de s'intéresser à certains aspects de la microscopie biphotonique.

La notation $1'$ désigne la valeur angulaire 1 minute d'arc, c'est-à-dire une soixantième de degré soit $1' = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche.

I. Pouvoir de résolution de l'œil humain

Cette partie s'appuie sur les documents 1, 2 et 3. L'œil peut être modélisé par une lentille convergente de distance focale variable f' placée dans l'air d'indice $n=1$ et de diamètre D , identique à celui de la pupille d'entrée de l'œil. On désigne par λ la longueur d'onde moyenne du rayonnement visible égale à 500 nm .



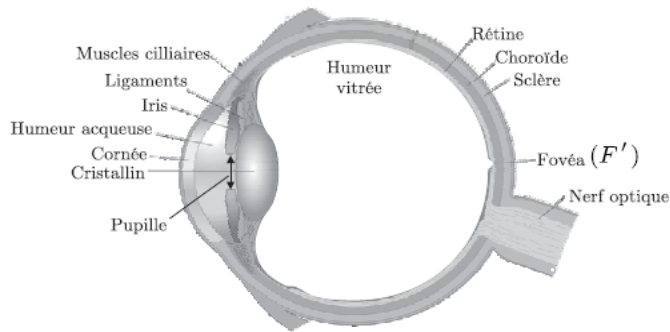
Dans cette partie, on considèrera deux objets, ponctuels, incohérents, placés dans l'air à une distance grande devant f' , dont les images se forment au centre de la fovéa d'un œil emmétrope. Comme indiqué sur la figure 1, ces objets sont séparés par un angle α .

1) En considérant le nombre fini N de cônes présents par unité de surface au centre de la fovéa et sans tenir compte de la diffraction, estimer la valeur minimale de α , notée α_1 , permettant de discerner deux objets ponctuels à l'infini. Le résultat sera donné en fonction de N et f' puis sera estimé numériquement en minute d'arc.

2) En raison de la diffraction par la pupille, l'image d'un objet ponctuel est une tâche sur la rétine. En tenant compte de la diffraction, estimer de nouveau la valeur minimale de α , notée α_2 séparant deux objets ponctuels incohérents vus distinctement par un œil emmétrope au centre de sa fovéa. Exprimer α_2 en fonction de λ et D . Comparer sa valeur numérique à celle de α_1 et commenter.

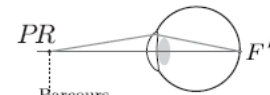
3) En utilisant la valeur minimale $\alpha_3 = 1'$ séparant deux objets ponctuels incohérents à distance finie, calculer numériquement la dimension a du plus petit objet observable à l'œil nu. Donner un exemple d'objet possédant une dimension comparable à a .

Document 1 : Modélisation de l'œil humain emmétrope

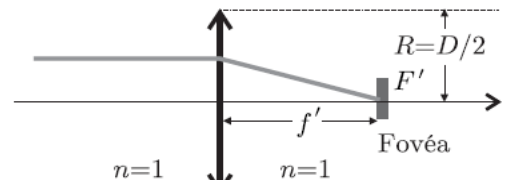


Diamètre de la pupille : $D = 3\text{ mm}$
 Indice de l'humeur vitrée : 1,33
 Indice du cristallin : 1,45

Sans accommodation



Accommodation maximale



Lentille mince équivalente

La fovéa contient en son centre environ $N = 160\,000$ cônes/ mm^2 , chacun de ces cônes est une cellule photosensible.

Le punctum proximum (PP) est le point le plus proche que l'on peut voir distinctement. Il est situé à 25 cm de la pupille et tel que dans cette situation $f' = f'_1 = 16\text{ mm}$.

Le punctum remotum (PR) est la distance à partir de laquelle l'œil n'accommode plus, il est tel que dans cette situation $f' = f'_2 = 17\text{ mm}$.

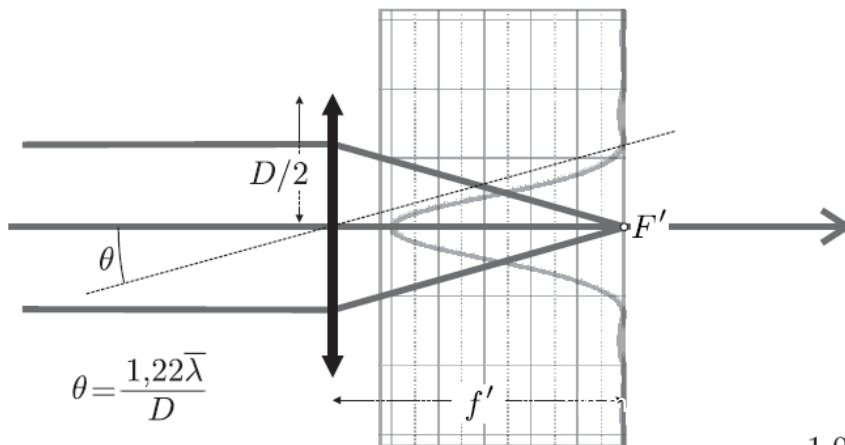
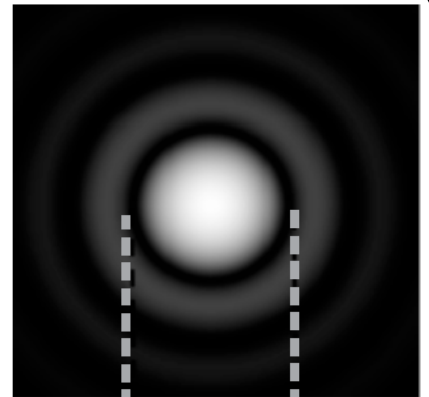
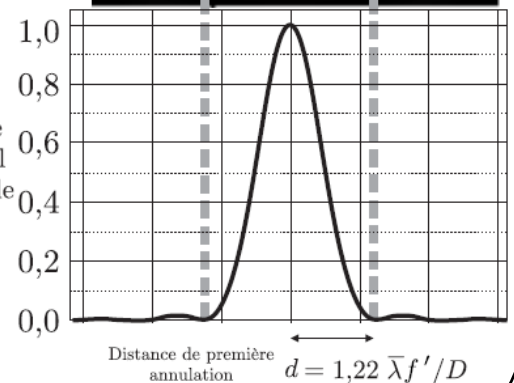


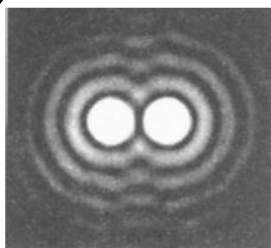
Image du plan focal de la lentille



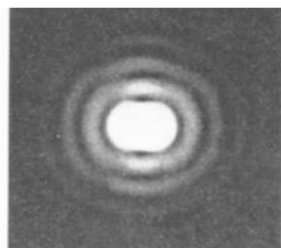
Intensité relative
dans le plan focal
image de la lentille



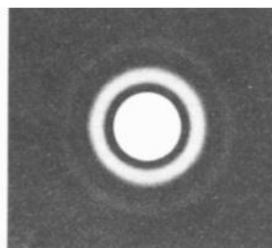
Document 2 : Diffraction par la pupille d'une lentille mince convergente



(a)

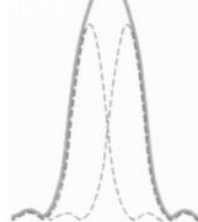
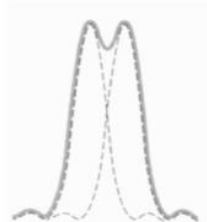
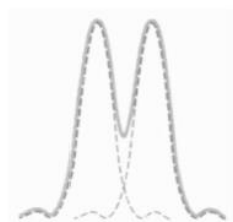


(b)



(c)

Images de deux sources ponctuelles incohérentes à travers une lentille convergente pour différentes valeurs de l'angle α par rapport à l'axe de symétrie.



Seuls les cas (a) et (b) permettent de discerner deux maxima. En (b), il s'agit de l'angle minimal permettant de discerner deux taches.

Document 3 : Pouvoir de séparation entre deux taches issues de sources incohérentes

II Microscope de Van Leeuwenhoek

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek, était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule. Après polissage d'une goutte de silice fondue. Van Leeuwenhoek obtint des lentilles boule de rayon $R = 0,60 \text{ mm}$ de centre C. L'indice optique de la silice est noté n . La lentille, utilisée dans les conditions de Gauss possèdent des foyers objets et image notés respectivement F et F'.

Antoni van Leeuwenhoek développe une technique nouvelle (et qu'il gardera jalousement secrète) pour la fabrication de petites sphères de verre de haute qualité qu'il utilise comme lentilles optiques de forte puissance. Il en construit ainsi plusieurs centaines et met au point plus de 25 microscopes à lentilles uniques, dont 9 nous sont parvenus presque intacts. Ses instruments sont composés d'un châssis de cuivre ou d'argent et présentent des performances remarquables (grossissement de 275x à 500x probablement) exceptionnelles pour l'époque et qui ne seront égalées que près d'un siècle plus tard.

Document 4 : description du microscope historique de van Leeuwenhoek



Microscope de van Leeuwenhoek, d'une taille d'environ 5 cm. La lentille est placée dans le trou et l'objet, piqué sur la pointe en métal, est déplacé à l'aide des 3 vis devant la lentille. L'ensemble est tenu très près de l'œil, face à la lumière, et permet d'observer des objets de quelques microns.

4) Rappeler le principe d'une loupe à l'aide d'une lentille mince convergente. On fera un graphe soigné pour illustrer sa réponse. Définir et exprimer le grossissement d'une loupe dans le cas où l'œil n'accomode pas.

Déterminer la distance focale nécessaire pour obtenir un grossissement de l'ordre de grandeur des microscopes de Van Leeuwenhoek. On pourra utiliser le document 4.

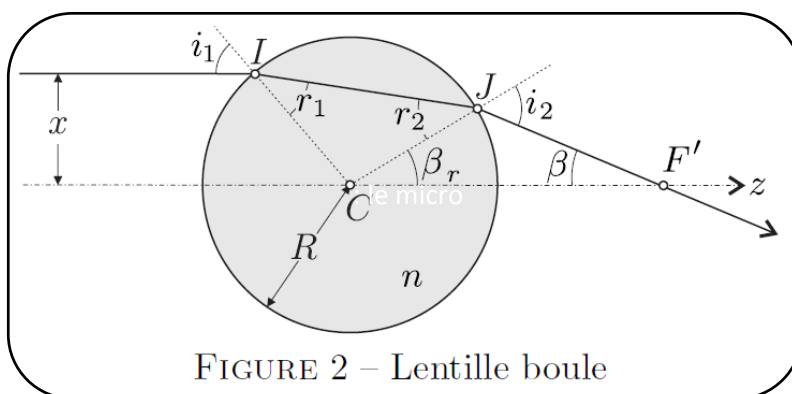
Avec le pouvoir de résolution de l'œil α_3 de la question 3), quelle taille minimale a' d'objet Van Leeuwenhoek pouvait-il espérer observer ? Commenter.

Dans la suite nous allons essayer de comprendre comment fonctionne une lentille boule de silice et plus particulièrement de déterminer sa distance focale image f'_l pour nous permettre de comprendre le grossissement obtenu par Van Leeuwenhoek qui a été inégalée pendant près de 100 ans.

Sur la figure 2, on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique (Cz) se propageant dans une lentille boule d'indice optique n placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C, perpendiculaires à l'axe (Cz). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss.

5) Rappeler en quoi consistent les conditions de Gauss. Pourquoi est-il intéressant de respecter de telles conditions ?

Les angles, non algébrisés ici, formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés i_1 au point I en entrée et i_2 à l'extérieur de la lentille au point J, en sortie. De mêmes les angles intérieurs seront notés r_1 et r_2 . L'angle $(F'CJ)$ est noté β_r et l'angle de déviation $(CF'J)$ sera noté β .



6) Déterminer la relation entre i_1 et i_2 . Exprimer i_1 en fonction de x et R . Exprimer β_r en fonction de i_1 et n puis en fonction de x , R et n . Exprimer β en fonction de i_1 et β_r puis de x , R et n . En déduire la distance focale f'_l définie comme la distance CF' sur la figure 2 en fonction de n et R .

Que peut-on dire du foyer objet F ?

7) Evoquer quelques arguments qui justifieraient le fait que l'on puisse modéliser une lentille boule par une lentille mince équivalente, dont on précisera le centre optique O et la distance focale.

8) Pour la boule de silice fabriquée par Van Leeuwenhoek. Estimer numériquement f'_l en prenant $n=1.5$. Conclure quant au fonctionnement du microscope de Van Leeuwenhoek.

Pour finir avec cette deuxième partie, nous allons essayer de comprendre une photographie prise à bord de la station spatiale internationale, en utilisant les résultats obtenus sur la lentille boule mais cette question n'est pas directement liée à la problématique du microscope. La boule d'eau observée sur la photographie a un rayon de 5 cm.

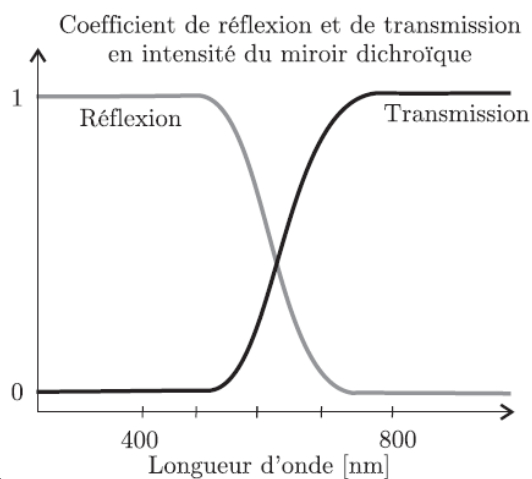
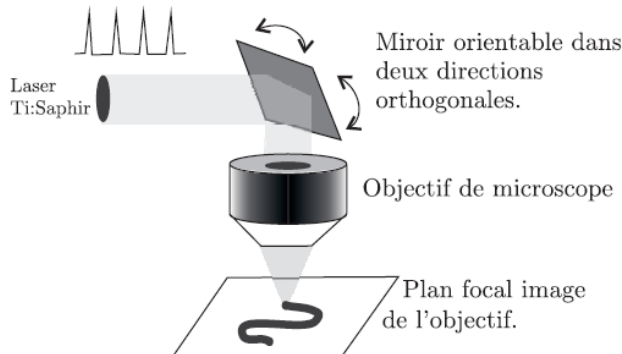


Photographie 1 : le japonais Koichi Wakata observe une goutte d'eau en lévitation à bord de l'ISS.

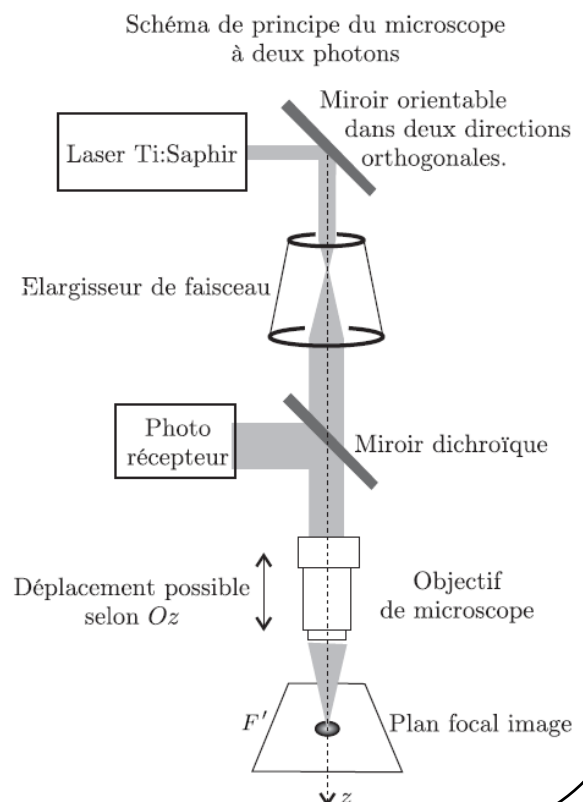
D'après : [http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2009/06/Japan_Aerospace_Exploration_Agency_JAXA_astronaut_Koichi_Wakata_\(2009\)](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2009/06/Japan_Aerospace_Exploration_Agency_JAXA_astronaut_Koichi_Wakata_(2009))

9) Interpréter la photographie 1 ci-dessus. On pourra en particulier estimer la distance entre la boule d'eau et le spationaute. On rappelle que l'eau a un indice optique de l'ordre de 1,3. Formuler quelques critiques quant à l'exploitation de la photographie.

Principe de balayage du faisceau par orientation d'un miroir



Document 5 Principe du microscope à deux photons



III Microscopie non linéaire

L'utilisation d'un laser pulsé de longueur d'onde $\lambda_L=800nm$ comme source de lumière permet à certains constituants des tissus comme le collagène d'émettre un signal détectable et de pouvoir obtenir des images tridimensionnelles sans utiliser de colorant.

Le schéma de principe d'un tel microscope est représenté document 5.

III.1 Réponse non linéaire de l'échantillon

Pour étudier la réponse d'un composé, comme le collagène, à une onde électromagnétique, on utilise un modèle classique, où le système est une charge q supposée ponctuelle de masse m , liée par une force $\vec{F}_1$ de type élastique à un centre O fixe dans le référentiel de l'échantillon. La force liant q à O s'écrit $\vec{F}_1 = -m\omega_p^2 x \vec{u}_x$, ω_p est une pulsation caractéristique du composé étudié.

On supposera le mouvement de la charge q unidimensionnel suivant la direction (Ox), supposée fixe du champ électrique incident $\vec{E}$ et on notera $x(t)$ la distance entre O et la charge q . Pour simplifier on ne considère que le champ électrique $\vec{E}$ lié au champ incident et en raison des dimensions impliquées, seule la dépendance temporelle de $\vec{E}$ aura un effet sur le mouvement de la charge q . On notera ainsi $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

Les effets des champs magnétique et de pesanteur sont négligés dans le bilan des forces. L'interaction de la charge q et de son environnement est modélisé par une force de friction visqueuse $\vec{F}_2$ avec $\vec{F}_2 = -m\Gamma \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$ et $\Gamma > 0$.

10) Justifier l'existence d'un régime forcé stable. Déterminer l'expression de $x_1(t)$ en régime forcé.

Tracer l'amplitude de $x_1(t)$ en fonction de la pulsation ω (on suppose $\frac{\omega_p}{\Gamma} > \frac{1}{\sqrt{2}}$). Que représentent physiquement les grandeurs ω_p et Γ ? Quel est le choix optimal de ω ?

Pour des valeurs des champ électriques intenses, une non linéarité dans la force rappel doit être introduite et on remplace la force $\vec{F}_1 = -m\omega_p^2 x \vec{u}_x$ par la force $\vec{F}_3 = -m(\omega_p^2 x + \beta x^2) \vec{u}_x$ ($\beta > 0$).

11) Déterminer l'énergie potentielle $E_p(x)$ associée à $\vec{F}_3$. Cette énergie potentielle peut-elle concerner une entité possédant un centre symétrie O ?

Dans ce cas non linéaire, le mouvement de q en régime forcé peut s'écrire comme la somme d'une perturbation $x_2(t)$ et du mouvement précédent $x_1(t)$. On aura donc à présent $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ avec $|x_2| \ll |x_1|$ à tout instant.

12) Montrer qu'en régime forcé, la perturbation $x_2(t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega_p^2 x_2 + \beta x_1^2 = 0 .$$

13) Déterminer la solution $x_2(t)$ en régime forcé.

III.1 Microscope à deux photons

Dans le microscope utilisé, on étudie le champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde rayonnée par l'échantillon et on admet la proportionnalité de ce champ à $x(t)$: ainsi $E_r(t) = Kx(t)$ où K est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer. L'intensité du rayonnement est variable suivant les compositions des différentes zones de l'échantillon. A l'intérieur du microscope un filtre passe-haut isole le signal de plus grande pulsation dans $E_r(t)$. Pour réaliser l'image, un photodétecteur très sensible mesure ensuite l'intensité associée au champ électrique à 2ω .

14) En s'aidant des résultats précédents et du document 5, expliquer succinctement le principe de fonctionnement du microscope.

Déterminer l'élément du dispositif jouant le rôle du filtre passe-haut.

L'objectif de microscope permet de focaliser le faisceau laser au niveau de son plan focal image positionnée autour de F' . On admet que la taille transversale du faisceau $2W_0'$ autour du point F' correspond à la résolution latérale du microscope et est égale à $1\ \mu m$. On peut montrer que l'intensité lumineuse du faisceau laser autour du foyer image F' ($z'=0$) est donnée par l'expression le long de l'axe optique (Oz) :

$$I(z') = I(0) \frac{1}{1 + \left(\frac{z'}{2z_R'} \right)^2} \text{ où } z' \text{ est la distance entre le}$$

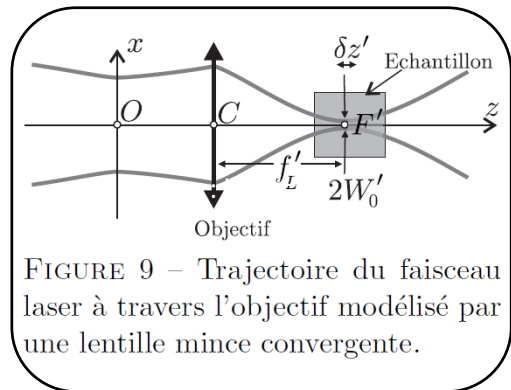


FIGURE 9 – Trajectoire du faisceau laser à travers l'objectif modélisé par une lentille mince convergente.

point d'observation et le point F' et z_R' est défini par l'expression $z_R' = \frac{\pi W_0'^2}{\lambda_L}$.

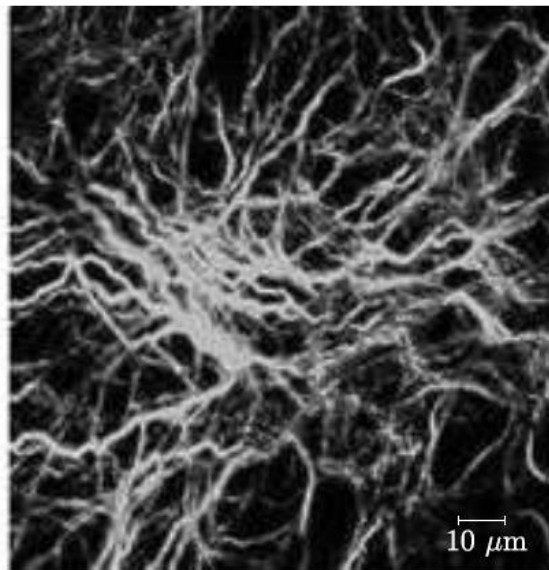
L'intensité du signal à 2ω est proportionnelle au carré du champ électrique à 2ω , lui-même proportionnel au carré du champ incident à ω . La profondeur de résolution $\delta z'$ est donc défini par :

$$\left(\frac{I(\delta z')}{I(0)} \right)^2 = 1/10.$$

15) Exprimer $\delta z'$ en fonction de W_0' et λ_L puis estimer sa valeur numérique.

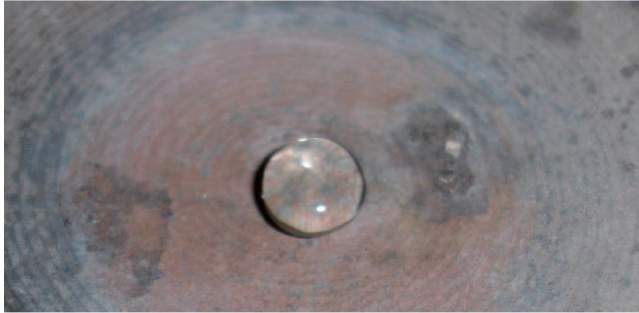
Les dimensions de $\delta z'$ et W_0' sont comparables aux diamètres des fibres de collagène qui s'entrelacent pour former les tissus biologiques.

16) Le faisceau d'un laser Ti : Saphir est focalisé par un objectif de microscope sur un échantillon comportant des fibres de collagène. Expliquer comment il est possible de construire une image tridimensionnelle, comme celle de la photographie 2 sans aucune coloration. Préciser l'ordre de grandeur de la résolution obtenue.



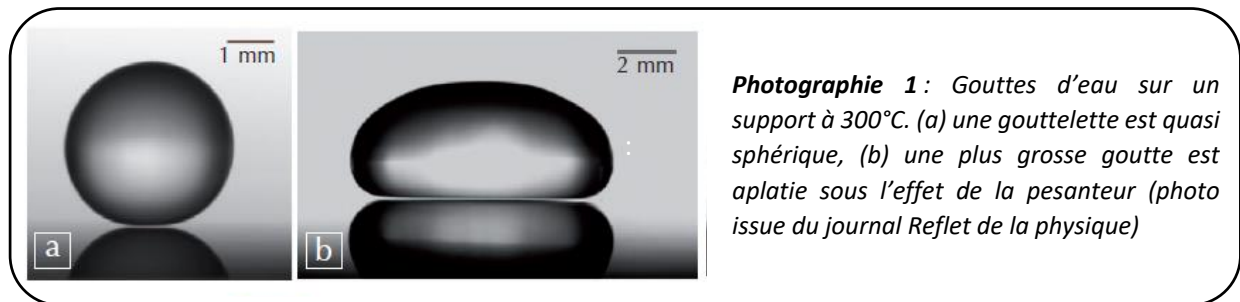
Photographie 2 : image de collagène obtenue avec le type de microscope étudié dans ce sujet

La caléfaction (librement inspiré du sujet X PC 2013)



Une goutte d'eau posée sur une plaque chaude s'évapore en une fraction de seconde, émettant parfois un « pshitt » caractéristique. Toutefois, si la température de la plaque est très supérieure à la température d'ébullition du liquide, on observe que le temps de vie de la goutte augmente fortement, pour atteindre jusqu'à plusieurs minutes. La goutte est alors isolée thermiquement de la plaque par un film

de sa propre vapeur : c'est le phénomène de **caléfaction**, ou de Leidenfrost, du nom du médecin hollandais qui a le premier décrit en détail cet état particulier. Dans cet état, on observe également que les gouttes sont très mobiles et glissent sur le film de vapeur qui les protège.



Photographie 1 : Gouttes d'eau sur un support à 300°C. (a) une gouttelette est quasi sphérique, (b) une plus grosse goutte est aplatie sous l'effet de la pesanteur (photo issue du journal *Reflète de la physique*)

Ce sujet est constitué de deux parties indépendantes : dans une première partie, on étudie les caractéristiques d'une goutte d'eau en caléfaction sur une plaque très chaude. Dans une seconde partie, on étudie le mouvement d'une goutte d'oxygène liquide en caléfaction au voisinage d'un aimant.

Les valeurs numériques nécessaires pour les applications numériques et les notations utilisées dans ce sujet sont rassemblées en partie dans le tableau ci-dessous.

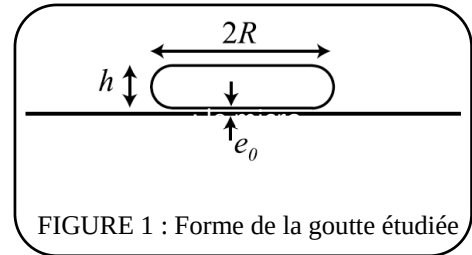
Données numériques

Enthalpie de vaporisation de l'eau à 100°C	L	$2,3 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
Conductivité thermique de la vapeur d'eau	λ	$2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Tension superficielle de l'interface eau/air	γ	59 mN.m^{-1}
Masse volumique de l'eau à 100°C	ρ_l	$9,6 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-3}$
Masse volumique de la vapeur d'eau à 100°C	ρ_v	$0,60 \text{ kg.m}^{-3}$
Viscosité de la vapeur d'eau à 100°C	η	$1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$
Accélération de la pesanteur	g	$9,8 \text{ m.s}^{-2}$

I Etude des caractéristiques de la goutte

I.1 Forme de la goutte

Nous souhaitons caractériser tout d'abord la forme d'une goutte en caléfaction. Nous considérerons le cas d'une goutte prenant la forme d'un palet d'épaisseur h et de rayon R (voir figure 1) Nous supposons ici que la goutte est très aplatie : $h \ll R$. Le volume de la goutte est alors $\Omega = \pi R^2 h$.



Le coefficient de tension superficielle associée à une interface est une grandeur caractéristique qui mesure le coût énergétique de création d'une interface (ici liquide/air). Cette grandeur est toujours positive et nous la noterons γ . L'énergie de surface associée à la forme d'une goutte liquide de volume Ω donné s'exprime de la manière suivante : $E_s = \gamma \Sigma$ où γ est la tension superficielle de l'interface eau/air et Σ l'aire de l'interface eau/air de la goutte.

1) Déterminer la dimension du coefficient γ de tension superficielle. Proposer une expression de l'énergie E_s de tension superficielle en fonction de γ , Ω et h . On néglige la surface latérale de la goutte car $h \ll R$.

La forme de la goutte est dictée par une compétition entre la tension superficielle, qui tend à minimiser l'aire de l'interface eau/air de la goutte et la gravité qui tend à aplatir la goutte.

2) Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de la goutte.

3) Montrer que dans la limite où $h \ll R$, l'énergie potentielle totale E_p s'écrit sous la forme :

$$E_p(h) = \rho \Omega g \frac{h}{2} + 2\gamma \frac{\Omega}{h}.$$

En déduire l'épaisseur d'équilibre h_e de la goutte caléfiée en fonction de la longueur capillaire du liquide $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Donner une estimation numérique de l_c et h_e .

On supposera dans la suite du sujet que l'épaisseur h de la goutte est toujours égale à son épaisseur à l'équilibre h_e .

I.2 Mesure optique de l'épaisseur du film de vapeur

On dirige sous la goutte un faisceau laser, de longueur d'onde $\lambda_L = 633 \text{ nm}$, parallèle au substrat (voir figure 2) On observe sur un écran situé à une distance $X = 50 \text{ cm}$ de la goutte le motif de la figure 2.

4) Expliquer ce phénomène. En assimilant le film de vapeur à une ouverture rectangulaire de largeur e_0 et de longueur infinie, déterminer un ordre de grandeur de l'épaisseur e_0 du film de vapeur sous la goutte. On utilisera cet ordre de grandeur dans la suite.

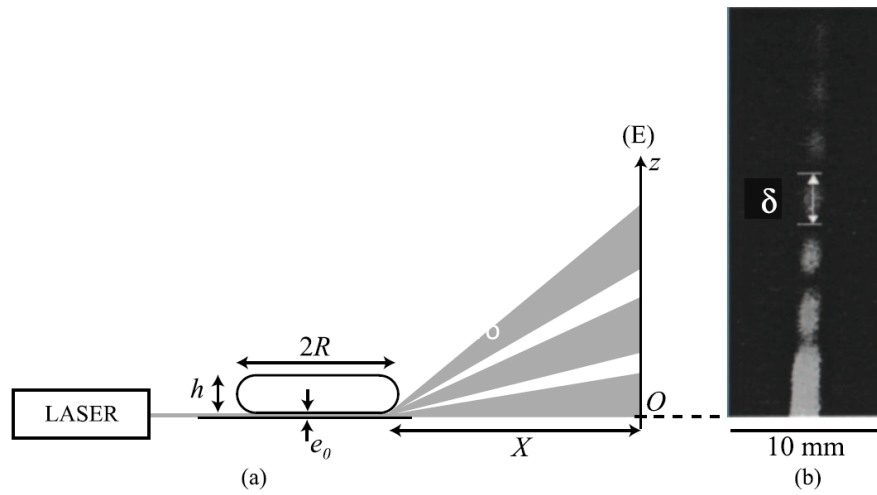


FIGURE 2: Mesure optique de l'épaisseur du film de vapeur sous une goutte en caléfaction. (a) Un faisceau laser est envoyé horizontalement entre la goutte et la plaque chaude. On observe l'intensité lumineuse sur un écran (E) situé à une distance X de la goutte. (b) Motif lumineux observé sur l'écran. Le segment noir représente 10 mm.

I.3 Temps de vie de la goutte

Nous supposons dans cette partie que la température de la plaque T_p et que celle de la goutte T_e sont uniformes. Nous supposons également que l'épaisseur du film de vapeur est homogène et égale à e_0 . Par ailleurs on se placera dans le cas où $e_0 \ll h$ et $e_0 \ll R$.

Nous admettons que la goutte reçoit un flux thermique (chaleur par unité de temps en $J.s^{-1}$) de la part de la couche de vapeur d'eau située en dessous d'elle donnée par la formule ci-dessous :

$$\Phi = \frac{\pi R^2 \lambda \Delta T}{e_0},$$

où λ désigne la conductivité thermique de la vapeur d'eau et où $\Delta T = T_p - T_e$ désigne l'écart de température entre la plaque et la goutte. On suppose la température de la goutte toujours égale à la température de vaporisation à pression atmosphérique $T_e = 100^\circ C$.

5) En appliquant le premier principe, dont on justifiera soigneusement l'expression dans la situation considérée, à un système choisi judicieusement, montrer que la masse d'eau évaporée par unité de temps s'écrit :

$$\dot{m} = \frac{\lambda \Delta T}{L e_0} \pi R^2, \text{ où } L \text{ est la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à pression ambiante.}$$

Donner une estimation numérique de $\dot{m}$ pour une goutte de rayon $R = 10 \text{ mm}$ sur une plaque à température $T_p = 300^\circ C$. En déduire une estimation rapide du temps de vie τ_v d'une telle goutte.

On cherche maintenant à étudier plus précisément la loi d'évolution temporelle $R(t)$ de la goutte.

Une étude de mécanique des fluides permet de trouver la loi d'évolution de l'épaisseur e_0 de la couche de vapeur sous la goutte en fonction du rayon de la goutte R :

$$e_0 = R^{1/2} \left(\frac{\lambda \Delta T \eta}{\rho_l g l_c L \rho_v} \right)^{1/4}, \text{ où } \eta \text{ représente la viscosité de la vapeur d'eau à } 100^\circ\text{C}.$$

6) Montrer que le « rayon » $R(t)$ de la goutte est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{R}}{R^{1/2}} = -\alpha,$$

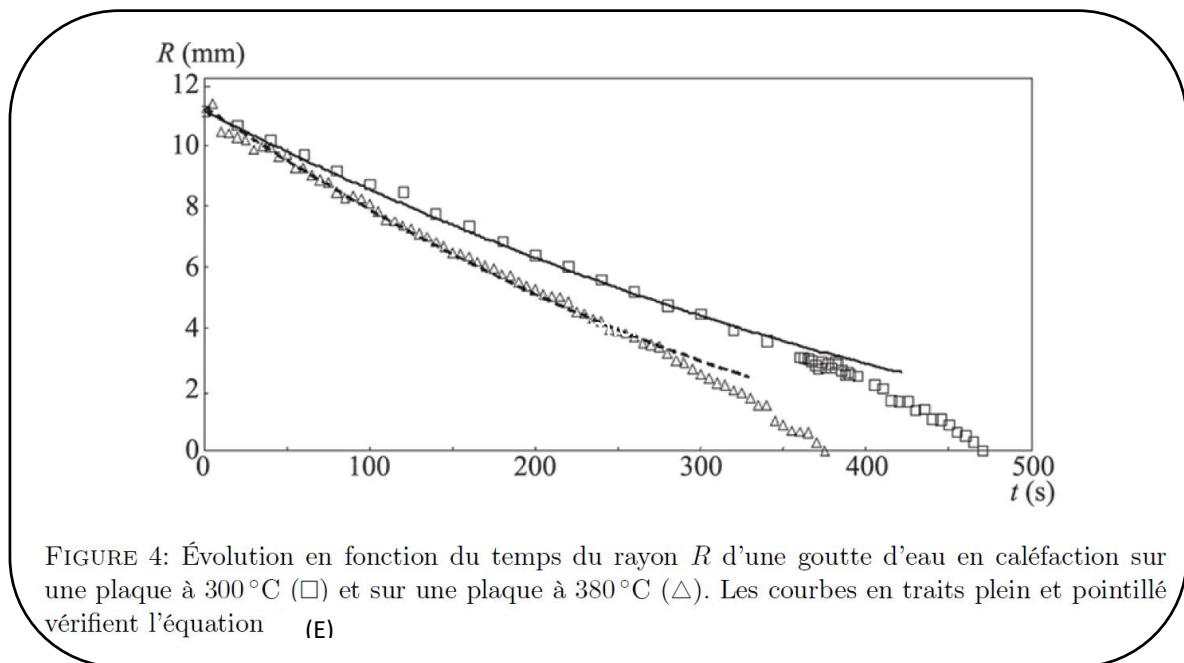
où α est une constante que l'on déterminera en fonction de λ , ΔT , L , l_c , ρ_l , ρ_v , g et η .

7) Montrer alors que le « rayon » $R(t)$ d'une goutte caléfiée évolue selon la loi suivante :

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^2, \quad \text{équation (E)}$$

où R_0 est le rayon initial de la goutte. Donner l'expression de τ en fonction R_0 et de α .

8) Donner l'expression du temps de vie τ'_v de la goutte. Commenter la dépendance en ΔT .



9) En utilisant la figure 4, comparer les résultats du modèle précédent aux observations expérimentales. Expliquer le désaccord entre le modèle et les résultats expérimentaux le plus quantitativement possible. On pourra prendre des initiatives et utiliser les divers documents présentés dans le sujet.

II. Goutte d'oxygène en caléfaction

On s'intéresse dans cette partie aux trajectoires de gouttes d'oxygène liquide en caléfaction sur une plaque à température ambiante. L'oxygène est paramagnétique, si bien qu'une goutte soumise à un champ magnétique acquiert un moment dipolaire magnétique et peut subir une force d'origine magnétique.

On suppose ici que les gouttes sont quasi-sphériques de rayon R et de petite taille ($R \ll l_c$). Par ailleurs, on admettra que la durée des expériences est suffisamment courte pour que la taille d'une goutte ne change pas au cours d'une expérience.

L'énergie d'interaction d'une goutte de volume Ω avec un champ magnétique B s'écrit :

$$E_{mag} = -\frac{\chi\Omega}{2\mu_0} B^2,$$

où $\chi > 0$ est la susceptibilité magnétique de l'oxygène liquide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

10) Définir le moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant plane. Expliquer l'origine physique de l'interaction qui dérive de l'énergie potentielle E_{mag} .

On s'intéresse maintenant à l'expérience décrite sur la figure 5. Une goutte d'oxygène liquide en caléfaction est lancée sur un support horizontal. On place sous ce support, au centre de la plaque, un aimant, dont le moment dipolaire est noté $\vec{M}$ dont l'axe Nord-Sud est orienté selon la verticale et dont la position est repérée par le point O à la surface de la plaque. La goutte est lâchée à grande distance avec une vitesse V_0 et un paramètre d'impact b .

11) Donner l'ordre de grandeur du moment dipolaire associé à un aimant usuel et dessiner l'allure de la carte de champ magnétique associée en précisant les pôles nord et sud sur le tracé ?

Donner l'orientation de la force magnétique subie par une goutte d'oxygène liquide au voisinage d'un aimant.

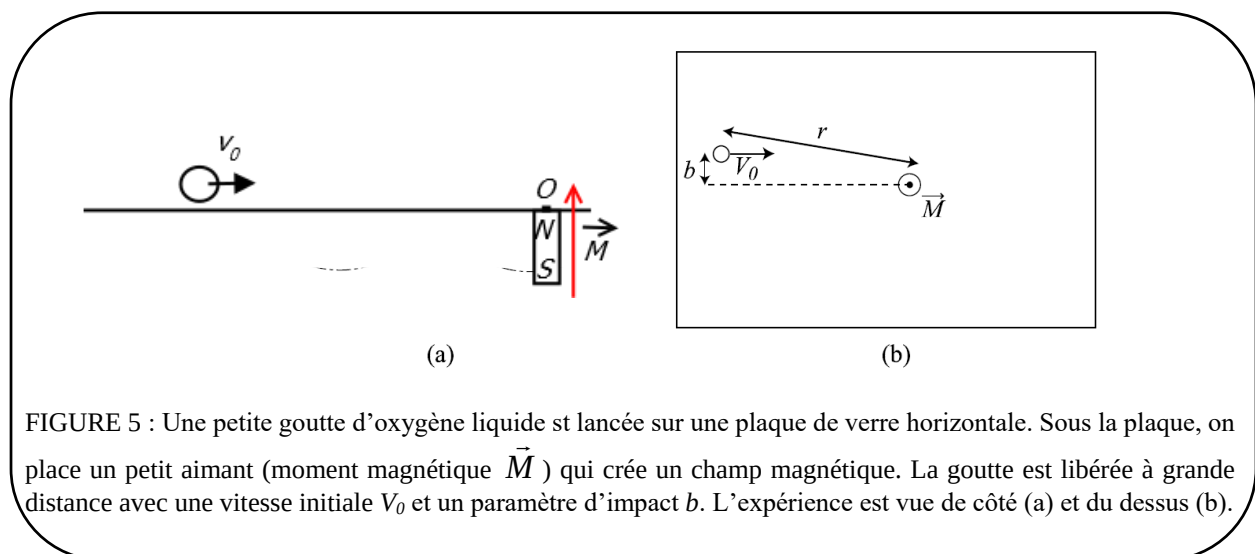


FIGURE 5 : Une petite goutte d'oxygène liquide est lancée sur une plaque de verre horizontale. Sous la plaque, on place un petit aimant (moment magnétique $\vec{M}$) qui crée un champ magnétique. La goutte est libérée à grande distance avec une vitesse initiale V_0 et un paramètre d'impact b . L'expérience est vue de côté (a) et du dessus (b).

L'énergie potentielle magnétique d'interaction entre la goutte et le champ magnétique est donnée par la formule (en coordonnées polaires de centre O et dans le plan horizontal) :

$$E_{mag}(r) = -\frac{E_0}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^6},$$

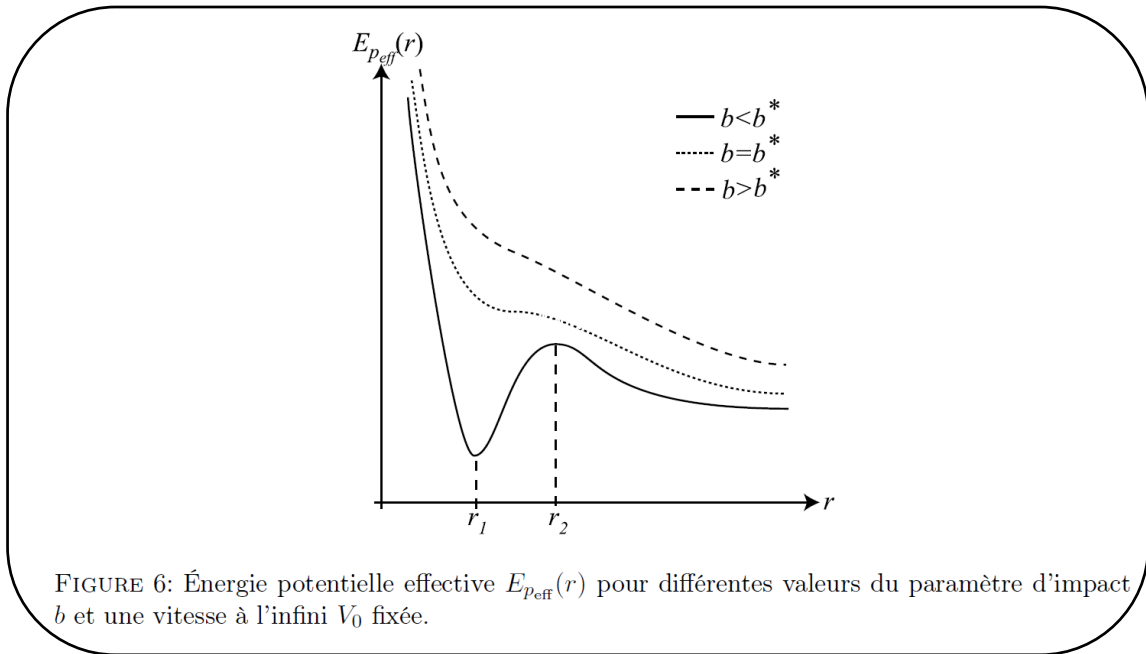
où $r=OM$ désigne la distance entre l'aimant et la position de goutte assimilée à un point matériel M de masse m et $E_0 > 0$.

12) Exprimer la force subie par la goutte dans la base polaire. Appliquer le théorème du moment cinétique à la goutte par rapport au point O et conclure.

13) Ecrire l'énergie mécanique E_m de la goutte. Expliquer soigneusement pourquoi elle est conservée au cours du mouvement.

14) Montrer que l'étude du mouvement peut alors se ramener à l'étude d'un point matériel ayant une énergie potentielle effective $E_{peff}(r)$ dont on donnera l'expression en fonction de $E_{mag}(r)$, m , b et V_0 et r .

Sur la figure 6, quelques courbes représentatives de cette énergie potentielle effective $E_{peff}(r)$ ont été tracées pour différentes valeurs du paramètre d'impact b et une vitesse à l'infini V_0 fixée.



15) Justifier qualitativement l'allure de ces courbes en étudiant par exemple la dérivée de l'énergie potentielle effective $\frac{dE_{peff}(r)}{dr}$.

Nous discutons maintenant certaines caractéristiques des trajectoires possibles pour ces gouttes magnétiques.

16) Discuter l'existence possibles d'états liés ? Qu'en est-il avec d'autres conditions initiales que celles considérées dans l'énoncé (vitesse V_0 à l'infini et paramètre d'impact b) ?

17) Des trajectoires circulaires sont-elles possibles ? Si oui, discuter graphiquement le rayon de ces trajectoires. Dans le cas contraire, expliquer pourquoi de telles trajectoires sont impossibles.

18) On observe parfois que la goutte s'approche de l'aimant et fait plusieurs tours avant de repartir. Expliquer graphiquement à quelle distance de l'aimant la goutte tend à tourner.

19) On suppose que l'on a choisi les conditions initiales de sorte que la goutte a un mouvement circulaire stable. Déterminer la période des petites oscillations radiales autour de cette trajectoire circulaire.