

Khass 2025

Physique 1

Calculatrice autorisée — Documents interdits

Oscillations mécaniques et électriques

Il est souvent plus simple lorsque l'on veut étudier expérimentalement, au laboratoire, le comportement d'un oscillateur mécanique en fonction de ses paramètres, d'en réaliser une version électronique plutôt qu'une version mécanique. Les réglages sont plus fins, car plus nombreux et la possibilité d'acquisition directe des signaux en divers points du circuit électrique permet la mise au point et l'adaptation de ce dernier à la richesse des oscillations mécaniques. Après avoir étudié un oscillateur mécanique et entrepris sa modélisation numérique dans la première partie, nous construirons progressivement dans la seconde son équivalent électronique. Dans tout le problème un point surmontant une fonction désigne sa dérivée temporelle : $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.

1 Oscillateur mécanique

On considère un ressort d'extrémités N et M , de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t) = NM$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse m . L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 1).

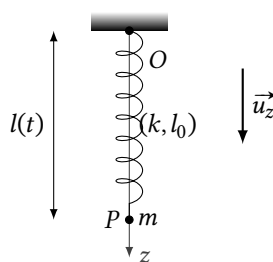


FIG. 1 : Oscillateur vertical à ressort.

On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O , le point P appartient à la droite $(O, \vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement. On suppose tout d'abord que le ressort a une masse m_r nulle.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,k}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $E_{p,k}$ en fonction de k , l_0 et l .
2. Établir, en fonction de m , g et l , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O .
3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $l(t)$.
4. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
5. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0 .

Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k, l_0, m et g .

Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $l(t)$ en fonction de t . Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \simeq 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 300 \text{ g}$.

Dans les 6 questions suivantes, on tient compte de la masse m_r non nulle du ressort. On suppose que l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,k}$ du ressort établie à la question 1 n'est pas modifiée. Par contre, son énergie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$ est affectée par cette modification. Pour la déterminer, on suppose que, quelle que soit sa longueur l , la masse m_r du ressort est uniformément répartie sur toute sa longueur et que, pour tout z compris entre 0 et l , la tranche élémentaire de ressort comprise entre z et $z + dz$ possède, dans le référentiel $\mathcal{R}$, une vitesse proportionnelle à z . On conserve les mêmes origines que précédemment pour les énergies potentielles.

6. Exprimer la vitesse $\vec{v}(z)$ de la portion de ressort comprise entre z et $z + dz$ en fonction de $l, \dot{l}$ et z . En déduire l'énergie cinétique élémentaire dE_c de cette portion de ressort.
7. Établir l'expression de l'énergie cinétique E_c du ressort en fonction de m_r et l .
8. Exprimer l'énergie potentielle élémentaire de pesanteur dE_p de la portion de ressort comprise entre z et $z + dz$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur associée au ressort en fonction de m_r, g et l .
9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m du système constitué par le point matériel P de masse m et le ressort de masse m_r dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction de m, m_r, k, g, l_0 et l .
10. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Commenter.
11. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_1 .

Qualifier le mouvement observé en supposant que le point matériel P ne heurte pas le support fixe.

Déterminer l'expression de la période T_1 du mouvement du point matériel en fonction de T_0, m et m_r puis calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \simeq 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300 \text{ g}$ et $m_r = 36,0 \text{ g}$. On pourra utiliser l'approximation $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$.

12. Quelle condition doit satisfaire m_r pour que l'écart relatif entre T_0 et T_1 ne dépasse pas 1% ? On fera l'application numérique dans les conditions de la question précédente.

Le point matériel P de masse m est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite $(O, \vec{u}_x)$ (cf figure 2). Le ressort précédent, dont on suppose la masse m_r nulle dans toute la suite du problème, est toujours accroché par son extrémité N au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$ et par son extrémité M au point matériel P .

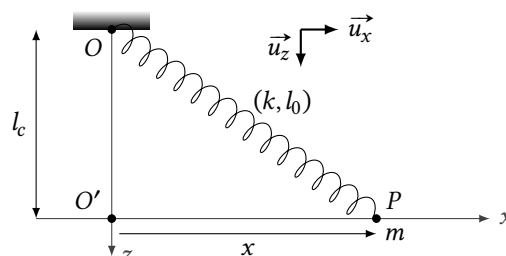


FIG. 2 : Oscillateur horizontal

On se place maintenant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O' telle que la droite $(O', \vec{u}_z)$ soit perpendiculaire à la droite $(O', \vec{u}_x)$: le point matériel P est ainsi repéré par son abscisse x sur la droite $(O', \vec{u}_x)$. On note l_c la distance OO' .

13. Établir l'expression de l'énergie potentielle $E_{p,P}$ du point matériel P en fonction de k, l_0, l_c et x en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O' et celle de l'énergie potentielle élastique du ressort pour $l = l_0$.
14. Déterminer les abscisses d'équilibre x_e du point P et discuter de leur stabilité respective en fonction du paramètre l_c . Donner les allures correspondantes de $E_{p,P}$ en fonction de x en précisant les valeurs remarquables.
15. Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel? Préciser sa hauteur U_b en fonction des données et calculer sa valeur pour $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $l_c = 0,200 \text{ m}$ et $l_0 = 1,00 \text{ m}$.
16. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
17. L'équation différentielle obtenue n'étant pas linéaire, on cherche à la résoudre de manière numérique. Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles couplées d'ordre 1 sur les variables $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$.

En introduisant les estimations $u_{0,n}$ de $u_0(t)$ et $u_{1,n}$ de $u_1(t)$ aux instants $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ où Δt désigne le pas de discrétisation temporelle, former les 2 relations exprimant $u_{0,n+1}$ et $u_{1,n+1}$ en fonction de $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$ déduites de la méthode d'Euler explicite.

Quelles valeurs doit-on donner pour $n = 0$ à $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$?

Pour $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300 \text{ g}$, $l_0 = 1,00 \text{ m}$ et $l_c = 0,200 \text{ m}$, on effectue la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement pour déterminer $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ en fonction de t pour 2 conditions initiales A et B différentes. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

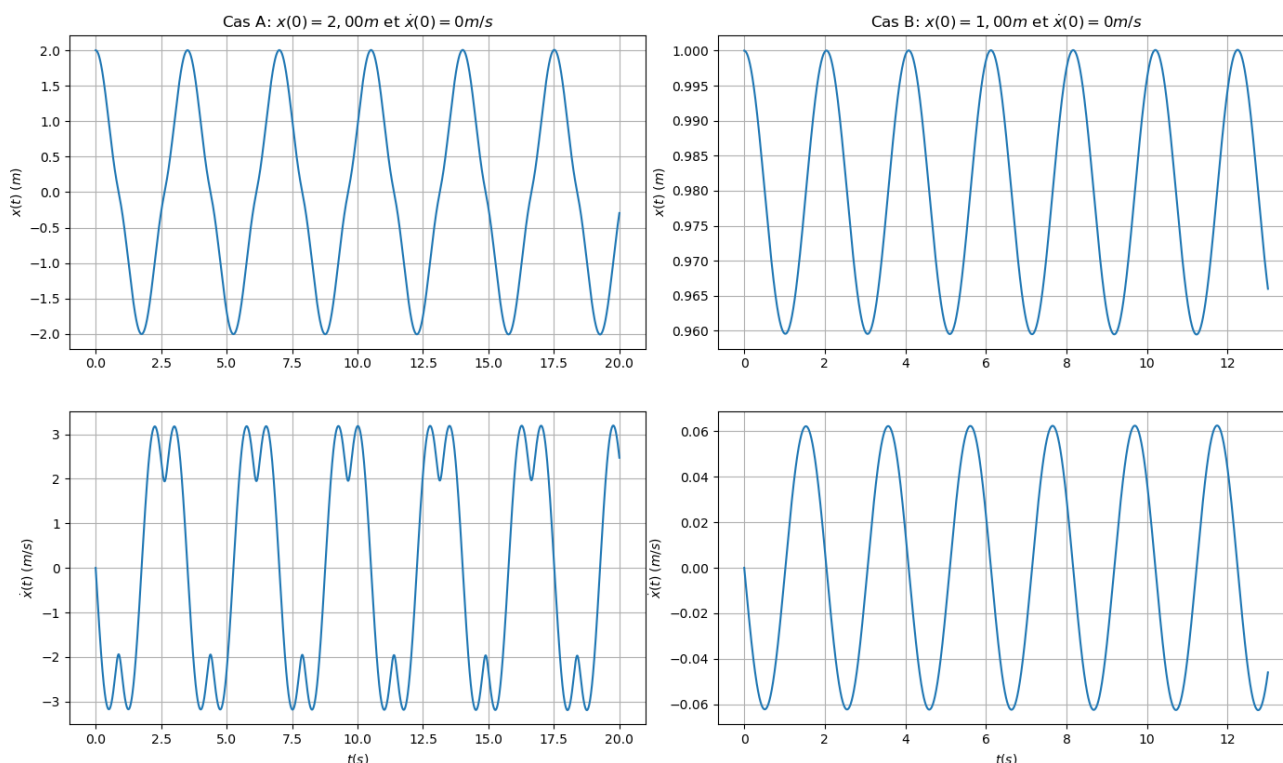


FIG. 3 : Solutions numériques pour deux conditions initiales distinctes

18. Commenter le plus précisément possible la nature du mouvement dans les deux cas. On pourra donner des valeurs numériques permettant de justifier l'allure des courbes et les valeurs moyennes de $x(t)$.
19. Les 2 cas A et B correspondent à deux types de mouvements différents du point P . Dans le cas où les conditions initiales sont du type $x(t=0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, établir la condition que doit vérifier X_0 pour que l'on soit dans le cas A. Effectuer l'application numérique.
20. Dans le cas B, donner l'expression approchée de la période T_2 des oscillations en fonction de T_0, l_c et l_0 .

Effectuer l'application numérique et comparer aux valeurs lues sur la figure 3.

En conservant les valeurs $k = 0,300 \times \pi^2$ et $l_0 = 1,00$ m, on a représenté sur la figure 4 l'allure de $\frac{dE_{p,P}}{dx}$ en fonction de x dans les cas $l_c < l_0$ et $l_c > l_0$.

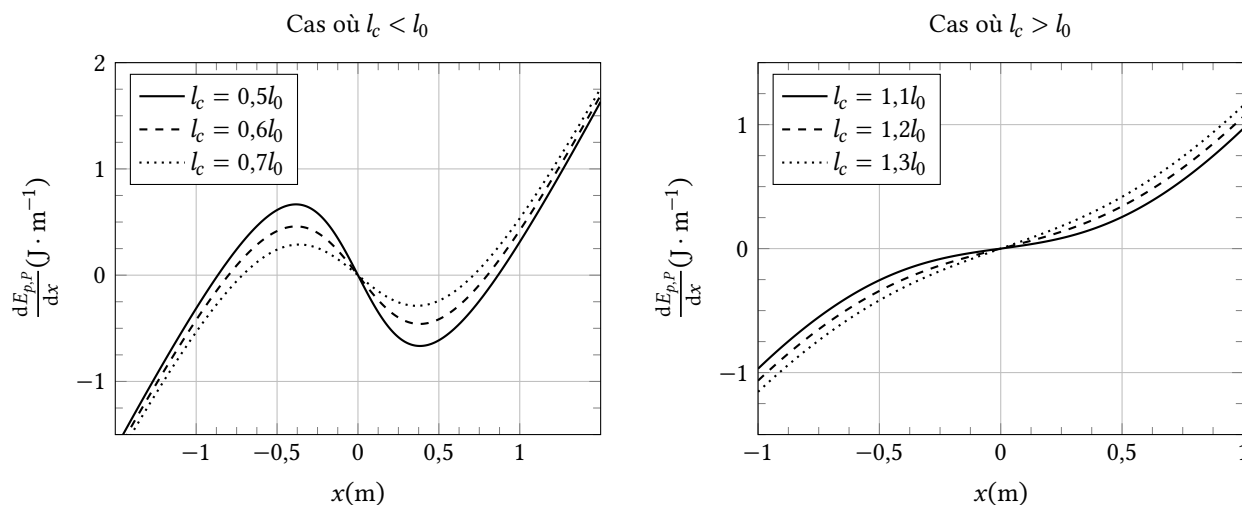


FIG. 4 : Représentation graphique de la dérivée de l'énergie potentielle de P .

21. On suppose que la fonction $\frac{dE_{p,P}}{dx}$ peut être modélisée par un polynôme de degré 3 de la variable x de la forme :

$$\frac{dE_{p,P}}{dx} = \alpha_m x + \beta_m x^3$$

Préciser en fonction de la valeur de l_c les signes des constantes α_m et β_m .

Réécrire l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$.

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing non amortie.

2 Oscillateur électrique

Dans la suite du problème, nous allons étudier le circuit électronique présenté sur la figure 7 visant à simuler l'oscillateur mécanique décrit dans la partie précédente.

Les trois amplificateurs linéaires intégrés (ALI) nommés (A1), (A2) et (A3) sont supposés idéaux, de gain infini et fonctionnant en régime linéaire. On notera $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ leurs tensions de saturation haute et basse.

22. Rappeler les conséquences sur les tensions et intensités des hypothèses d'ALI idéal et de régime linéaire.

2.1 Préliminaires

On considère le circuit suivant :

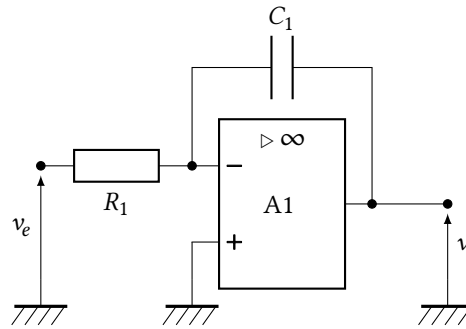


FIG. 5 : Bloc 1 de l'oscillateur électrique

23. En se plaçant en régime sinusoïdal forcé, établir la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e}$ du montage de la figure 5. En déduire l'équation différentielle reliant $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

On considère une autre partie du montage de la figure 7 :

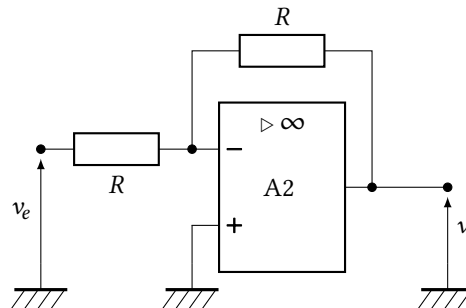


FIG. 6 : Bloc 2 de l'oscillateur électrique

24. Exprimer le gain $G = \frac{v_s}{v_e}$ du montage de la figure 6.

2.2 Montage complet

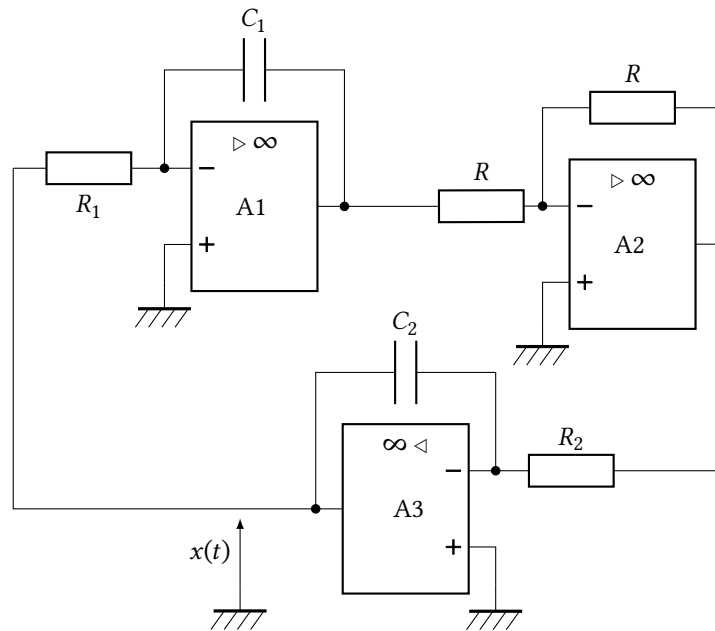


FIG. 7 : Oscillateur électronique

25. En utilisant les résultats des questions précédentes, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $x(t)$ définie sur le circuit de la figure 7.

À quelle situation mécanique de la première partie ce circuit correspond-il ?

26. On suppose, uniquement dans cette question, que l'on place une résistance R_0 en parallèle sur le condensateur de capacité C_1 . Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension $x(t)$.

À quelle situation mécanique ce circuit correspond-il ?

2.3 Utilisation d'un dipôle non linéaire

Pour simuler l'équation de Duffing non amortie, on introduit l'utilisation d'un dipôle D non linéaire dont la caractéristique statique est présentée sur la figure 8.

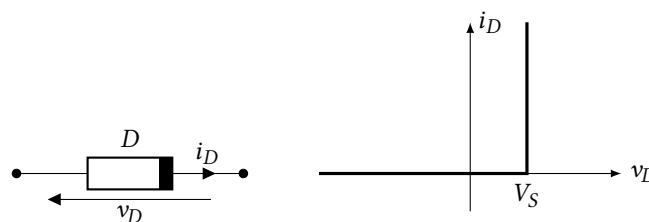


FIG. 8 : Caractéristique du dipôle non linéaire

27. Donner un protocole expérimental permettant de tracer la caractéristique dynamique du dipôle non linéaire sur l'écran d'un oscilloscope. À quelle condition la caractéristique ainsi tracée peut-elle être assimilée à la caractéristique statique de la figure 8 ?
28. Le dipôle peut être assimilé à des dipôles linéaires sur les deux branches de sa caractéristique. Préciser lesquels, et à quelle condition.

Ce dipôle est associé en série avec une source de tension réelle modélisée par une source idéale de tension V_0 en série avec une résistance r_g (voir figure 9).

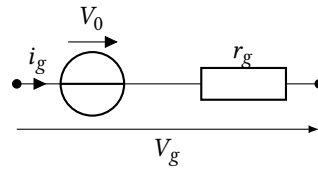


FIG. 9 : Modélisation d'une source réelle.

29. Déterminer l'équation de la caractéristique $i_g = f(V_g)$ de la source réelle.

Le dipôle non linéaire est alimenté par cette source réelle comme indiqué sur la figure 10.

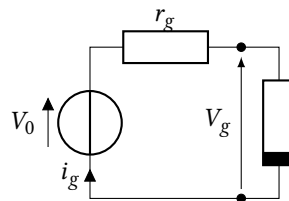


FIG. 10 : Association du dipôle non linéaire et de la source réelle.

30. Déterminer de manière graphique le point de fonctionnement du montage. On distinguera deux régimes de fonctionnement du dipôle non linéaire : donner la condition liant V_0 , V_s et r_g permettant de passer d'un régime à l'autre.

On associe maintenant deux dipôles D en série tête-bêche comme présenté sur la figure 11. Ces deux dipôles sont supposés parfaitement identiques, de tensions caractéristiques V_s égales.

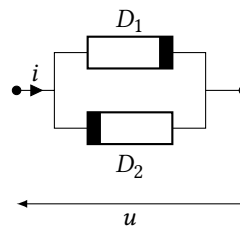


FIG. 11 : Association tête-bêche de deux dipôles non linéaires

31. Tracer la caractéristique $i = g(u)$ du dipôle équivalent ainsi constitué. Préciser les dipôles équivalents sur les trois portions de la courbe et les conditions pour se placer sur chacune des portions.

On considère le montage de la figure 12 réalisé avec un amplificateur linéaire intégré nommé (A4) supposé idéal, de gain infini et fonctionnant en régime linéaire.

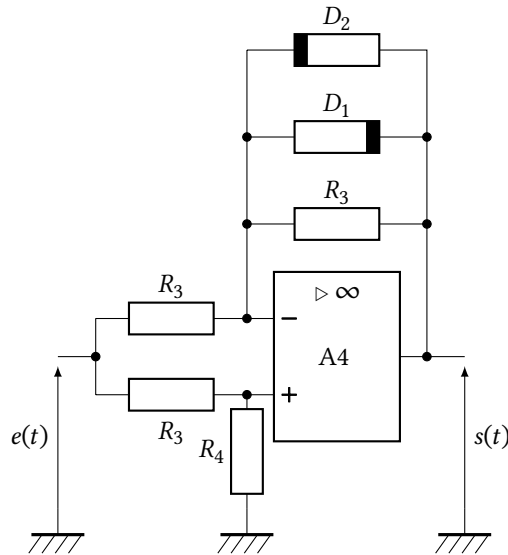


FIG. 12 : Circuit non linéaire

32. En effectuant la disjonction de cas sur les trois dipôles équivalents à $D_1 + D_2$, donner les relations entre $s(t)$ et $e(t)$. On précisera la condition sur e pour se trouver dans chaque cas. En déduire l'allure de la caractéristique $s = h(e)$ du montage pour $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $R_4 = 500 \Omega$.

Grâce à un montage en laboratoire, on a pu relever le tracé expérimental de la caractéristique $s = h(e)$ correspondant au circuit de la figure 12. Cette caractéristique est reproduite sur la figure 13.

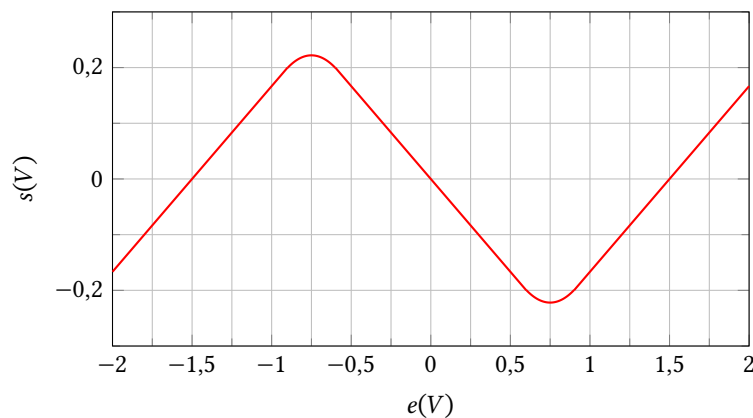


FIG. 13 : Relevé expérimental de la caractéristique du montage de la figure 12

33. En utilisant la figure 13, déterminer la valeur de la tension caractéristique V_S des dipôles utilisés.

On suppose pouvoir modéliser la fonction $s = h(e)$ par le polynôme de degré 3 de la forme :

$$s = \alpha_e e + \beta_e e^3$$

34. Déterminer les valeurs numériques α_e et β_e sur le relevé expérimental de la figure 13.

On insère maintenant le circuit non linéaire dans l'oscillateur électronique de la figure 7 pour obtenir le montage de la figure 14.

35. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $x(t)$ du circuit de la figure 14 en fonction de $R_1, R_2, C_1, C_2, \alpha_e$ et β_e . Commenter.

36. Quelle condition doit vérifier la résistance R_4 pour se trouver dans une situation semblable à celle de la question 21 avec $l_c > l_0$? On expliquera le raisonnement.

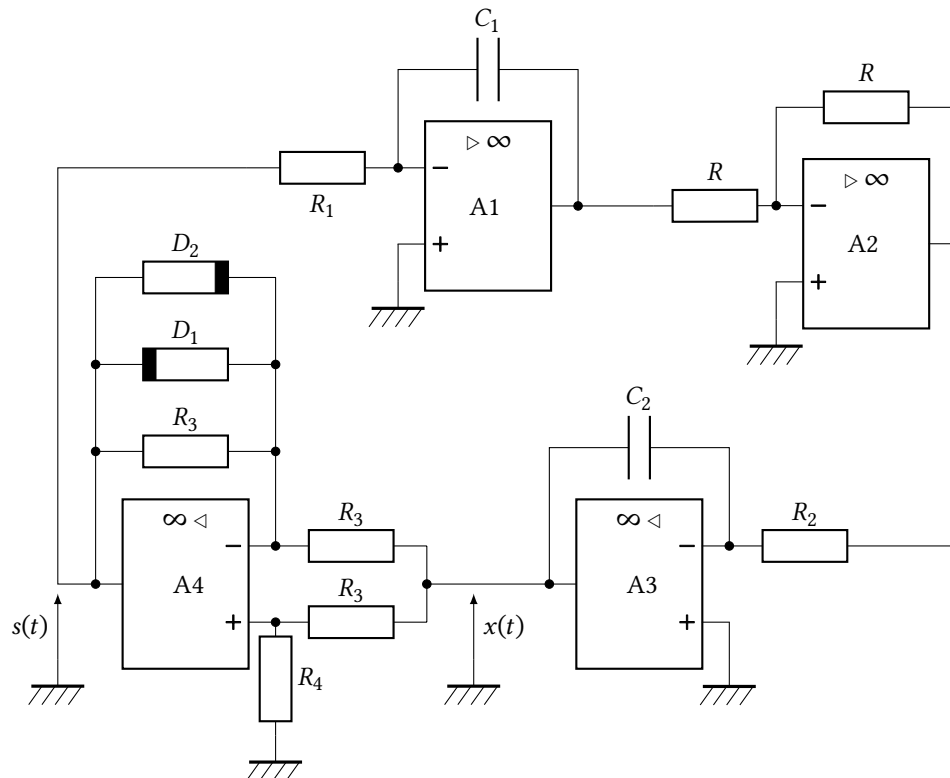


FIG. 14 : Oscillateur de Duffing électrique

On souhaite relever expérimentalement sur le montage de la figure 14 des courbes analogues à celles de l'oscillateur mécanique données sur la figure 3.

37. Comment avoir accès expérimentalement à une tension proportionnelle à $\dot{x}(t)$?

Comment imposer expérimentalement des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ non identiquement nulles dans le montage de la figure 14 ?

FIN DU PROBLÈME — FIN DE L'ÉPREUVE