

PHYSIQUE II

Durée : 4 h

*La calculatrice n'est pas autorisée.**L'énoncé de cette épreuve comporte 10 pages.****Les formules et valeurs numériques éventuellement nécessaires sont regroupés en début d'énoncé.***

Ce sujet se propose d'étudier quelques propriétés de physique en géométrie cylindrique.

Les deux problèmes sont indépendants.

Les applications numériques seront effectuées avec un seul chiffre significatif.

Notations, formulaire et données numériques.En coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient appliqué à une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ Viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ SI}$.Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ Rayon terrestre : $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$ Constante de gravitation $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ N.m}^{-2}.\text{kg}^{-2}$ Masse de la Terre : $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ Accélération de la pesanteur Terrestre : $g = 1 \times 10^1 \text{ m.s}^{-2}$ Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI}$ Valeurs numériques : $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln(3) \approx 1$; $\ln(5) \approx 1,5$

Problème 1 : Une expérience de physique à bord de l'ISS : mouvement d'une goutte d'eau autour d'une aiguille

Depuis sa mise sur orbite, la Station Spatiale Internationale (ISS) abrite des modules-laboratoires permettant de réaliser des expériences de pointe dans l'espace et en impesanteur. Depuis son lancement, plus de 3000 expériences ont été réalisées à bord allant de la physiologie à la physique fondamentale, en passant par la science des matériaux, la physique des fluides et l'astrophysique.

On note O le centre de masse de la station spatiale. La trajectoire du point O par rapport au référentiel géocentrique est supposée circulaire, de distance $h = 4 \times 10^2$ km par rapport à la surface de la Terre. Le référentiel géocentrique R_G , d'origine T centre de la Terre, est considéré comme galiléen.

1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.
2. On considère un point matériel M de masse m . Estimer numériquement la variation relative de la force de gravitation due à la Terre lorsque M est à la surface de la Terre ou au centre O de l'ISS. Commenter.

La partie de la station qui est dirigée vers la Terre est toujours la même. On considère le référentiel R_0 lié à l'ISS de repère orthonormé direct (x, y, z) dont l'axe x coïncide avec la radiale centre de la Terre-ISS et dont l'axe y est tangent à la trajectoire circulaire de l'ISS (voir figure 1).

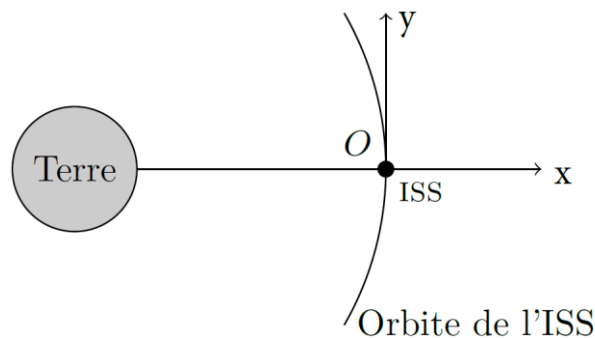


Figure 1

3. Justifier que ce référentiel n'est *a priori* pas galiléen.

Dans le cadre de l'expérience décrite dans la suite du sujet, on admet que le référentiel R_0 se comporte en bonne approximation comme un référentiel galiléen, moyennant de ne pas prendre en compte la force de gravitation exercée par la Terre : c'est l'impesanteur (en anglais microgravity).

En 2012, l'astronaute américain Don PETTIT réalise à bord de l'ISS l'expérience suivante : il frotte une aiguille à tricoter en nylon avec une feuille de papier, ce qui a pour effet de charger l'aiguille supposée infiniment fine avec une charge par unité de longueur négative notée λ considérée constante et uniforme et de valeur $\lambda \approx -10^{-7} \text{ C.m}^{-1}$. Dans le même temps, il crée au voisinage de l'aiguille une goutte d'eau de masse m et de rayon $R \approx 2 \text{ mm}$ à laquelle il donne une charge $q > 0$. Il constate que la goutte se met en orbite autour de l'aiguille, avec une pseudo-période de l'ordre de 3 s à une distance de l'aiguille de l'ordre de 1 cm (figure 2). Le mouvement dure jusqu'à ce que la goutte s'écrase sur l'aiguille.

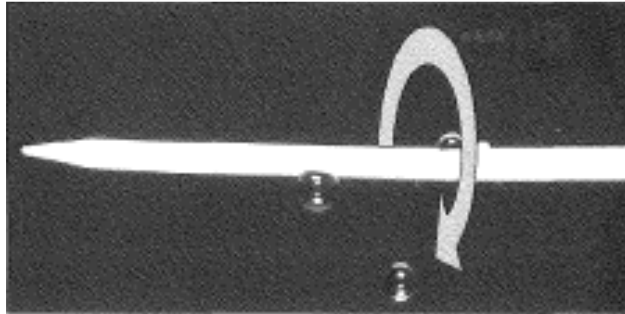


Figure 2 : Expérience de D. Pettit. La flèche grisée indique un mouvement circulaire de la goutte autour de l'axe de l'aiguille.

Pour décrire cette situation, on se place dans le référentiel R_0 . On considère un repère orthonormé muni des coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, l'axe Oz étant confondu avec l'axe de l'aiguille. La position de la goutte, supposée ponctuelle, est repérée à tout instant par le point $M(r, \theta, z)$. Le choix de l'origine O est supposé situé au milieu de l'aiguille.

Si on assimile l'aiguille à un fil très long, on peut montrer que le champ électrique créé par l'aiguille en un point M a pour expression : $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$.

4. Nommer et donner l'expression de la force subie par la goutte. Cette force est-elle une force centrale ?
5. Montrer que la force est conservative et établir l'expression de l'énergie potentielle associée, à une constante près, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Dans un premier temps, on néglige les frottements de l'air sur la goutte, supposée de masse constante. Initialement, $r(t=0) = r_0$, $z(t=0) = 0$ et $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_\theta$.

6. Justifier que le mouvement est plan.
7. En utilisant un théorème du moment cinétique que l'on précisera, déterminer l'expression de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de r , r_0 et v_0 .

8. Montrer que l'énergie mécanique de la goutte peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r), \text{ où } E_{p,eff}(r) = \frac{\alpha}{r^2} + \beta \ln r \text{ et } \dot{r} = \frac{dr}{dt}.$$

On explicitera les constantes α et β en fonction de ε_0 , m , r_0 , q et λ .

9. Tracer, en la justifiant, l'allure de la fonction $E_{p,eff}(r)$. Conclure sur la nature des mouvements possibles de la goutte et sur l'existence d'états de diffusion.
10. On s'intéresse au cas d'un mouvement circulaire de rayon r_c .

Établir l'expression de la vitesse v_c de la goutte autour de l'aiguille en fonction de q , λ , m et ε_0 .

A l'aide des données de l'expérience, estimer la masse d'une goutte et sa vitesse v_c . En déduire un ordre de grandeur de la charge q de la goutte.

On pourrait imaginer une expérience similaire en utilisant uniquement un champ magnétique uniforme de valeur B_0 . Quel serait l'ordre de grandeur du champ magnétique à donner pour observer une trajectoire possédant mêmes caractéristiques que précédemment ? Commenter.

11. Que peut - on dire de la stabilité de la trajectoire circulaire ?

Donner l'allure de la trajectoire a priori observée si on lance la goutte avec une vitesse $v_0 > v_c$.

La vitesse initiale de la goutte est maintenant $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{u}_\theta + v_{z0} \vec{u}_z$, avec $v_{z0} = \frac{dz}{dt}(t = 0)$ non nulle. On constate que si v_{z0} n'est « pas trop grand », la goutte arrivée peut effectuer des oscillations *quasi hélicoïdales* le long de l'aiguille (voir figure 3).

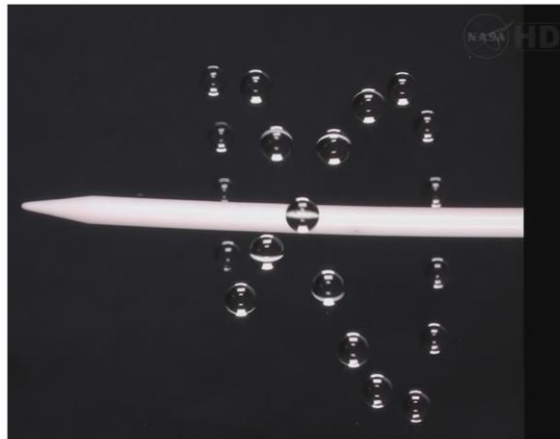


Figure 3 : oscillations le long de l'aiguille

12. Préciser ce que signifie « pas trop grand » dans ce contexte.

Justifier que le mouvement puisse être périodique selon (Oz) et déterminer la période des oscillations selon l'axe (Oz) en fonction de v_0 , ε_0 , m , r_0 , q et λ . Commenter.

Du fait des frottements de l'air sur la goutte, on observe que celle-ci finit par s'écraser sur l'aiguille au bout de plusieurs dizaines de secondes, après avoir effectué un certain nombre de tours. Dans les conditions de l'expérience, l'influence des frottements sur la goutte est supposée modélisée par une résultante de la forme $\vec{F} = -k\vec{v}$ avec $k = 6\pi\eta_a R$ où η_a désigne la masse viscosité de l'air.

On prend comme conditions initiales $r(t=0) = r_0$ et $\frac{dz}{dt}(t=0) = 0$.

On fait l'approximation suivante : la trajectoire est considérée comme localement circulaire, c'est-à-dire que sur un tour, $r(t) \approx \text{cte}$. La goutte tend tout de même à s'écraser sur l'aiguille à cause de la force de frottement.

13. Exprimer la puissance instantanée, notée P , cédée par cette force à la goutte d'eau.

A l'aide d'un raisonnement énergétique, montrer que le rayon de la trajectoire obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\tau}$$

où τ est une grandeur à exprimer en fonction des données du problème.

14. En déduire la loi d'évolution $r(t)$. Évaluer numériquement la durée de chute de la goutte et commenter le résultat.

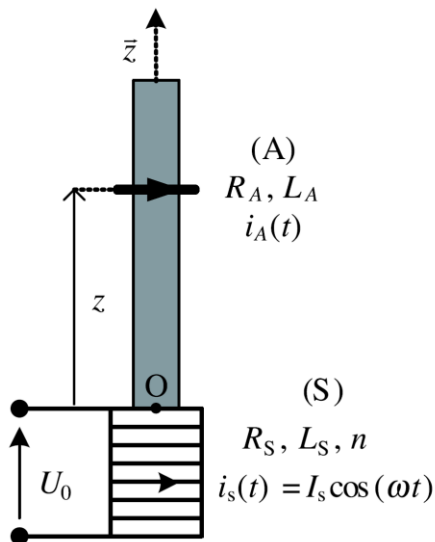
15. Calculer la variation relative de rayon au début de la trajectoire lorsque la goutte a effectué un tour autour de l'aiguille. Commenter la validité de l'approximation réalisée à la question **13**.

16. On examine dans cette question la faisabilité de cette expérience sur Terre. Dans le cas du mouvement circulaire étudié précédemment, comparer en norme la force exercée par l'aiguille sur la goutte au poids que subirait la goutte sur Terre. Conclure quant à la faisabilité de cette expérience sur Terre.

Problème II : L'Expérience d'Elihu Thomson

L'inventeur de cette expérience, également connue sous le nom de « l'anneau sauteur » est Elihu Thomson (1883-1937), connu pour la réalisation de multiples expériences et brevets et fondateur de la Huston Electric Company. Cette expérience fut réalisée pour la première fois en 1877 au congrès de l'American Institute of Electrical Engineers et est devenue depuis l'une des expériences phares des lois de l'induction.

Un solénoïde (S), de hauteur finie h_s , de section circulaire de rayon b , d'axe vertical ascendant Oz , et comprenant n_s spires jointives par unité de longueur est parcouru par un courant d'intensité $i_s(t)$. On note R_s la résistance électrique de l'enroulement et L_s son inductance propre.



Un anneau métallique indéformable circulaire (A), de rayon a , de masse m , d'épaisseur négligeable et d'axe Oz , est initialement maintenu en $z = 0$ au niveau de la face supérieure du solénoïde (voir figure 4). Cet anneau est mobile sans frottement et sans jeu autour d'une tige, parallèlement au plan horizontal et en restant centré sur l'axe. Il comprend selon les expériences $N = 1$ ou $N = 2$ spires toujours identiques, en série. On note R_A la résistance électrique de l'anneau et L_A son inductance propre. L'intensité du courant instantané induit dans l'anneau est notée $i_A(t)$.

L'inductance mutuelle entre (S) et (A), notée M , dépend de z et bien sûr de N .

Figure 4 : une réalisation
de l'expérience d'Elihu Thomson

L'axe vertical ascendant est représenté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$. Les vecteurs horizontaux $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ complètent la base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. L'origine O de l'axe Oz est au centre de la face supérieure du solénoïde, qui est donc situé dans la région $z < 0$.

L'ensemble du dispositif jouit donc de la symétrie cylindrique autour de l'axe Oz ; les conventions d'orientation des deux circuits sont les mêmes.

À l'instant initial, l'anneau est libéré.

On constate les faits suivants :

- F_1 : l'anneau (A), projeté vers le haut, se stabilise à une certaine hauteur z_0 . La position d'équilibre est stable.
- F_2 : un anneau constitué de deux spires identiques (masse totale $m = m_2 = 2m_1$) se stabilise plus haut qu'un anneau constitué d'une seule spire, identique aux deux premières.
- F_3 : les cotes d'équilibre pour deux anneaux géométriquement identiques, mais constitués l'un en aluminium l'autre en cuivre sont différentes : $z_0(\text{Al}) > z_0(\text{Cu})$.

Le problème propose une modélisation de plus en plus fine de l'expérience afin de rendre compte des observations.

II.A. Considérations générales

Champ créé par le solénoïde

On s'intéresse tout d'abord au champ magnétique créé par le solénoïde. On suppose que l'intensité dans le solénoïde est $i_S(t) = I_S \cos(\omega t)$.

17. On considère un point P quelconque de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Justifier que le champ magnétique créé par le solénoïde en P est de la forme :

$$\vec{B}(P, t) = B_r(r, z, t)\vec{u}_r + B_z(r, z, t)\vec{u}_z.$$

18. Sur la base de vos connaissances, donner l'allure des lignes de champ magnétique aux instants $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\omega}$.

19. Justifier que pour un point P situé sur l'axe (Oz) , le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(P_{axe}, t) = B_0(z, t)\vec{u}_z.$$

On admet que $B_0(z, t) = f_0(z)\cos(\omega t)$.

Que peut-on dire de la fonction $f_0(z)$? Tracer son allure.

Proposer un ordre de grandeur de la valeur maximale du champ magnétique pour un solénoïde de hauteur $h_s = 10$ cm, de rayon $b = 3$ cm, possédant $n_s = 2 \cdot 10^4$ spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'amplitude $I_S = 2$ A.

Le rayon a de l'anneau est considéré petit devant b ($a \ll b$). On admet que, dans ces conditions, le champ magnétique créé par le solénoïde en un point P de l'anneau s'écrit alors en bonne approximation :

$$\vec{B}(P_{anneau}, t) \approx B_0(z, t)\vec{u}_z - \frac{a}{2} \frac{\partial B_0(z, t)}{\partial z} \vec{u}_r.$$

20. Cette expression est-elle en accord avec l'allure des lignes de champ ? On pourra raisonner à $t = 0$.

Mutuelle inductance

L'anneau se trouve à la cote z .

21. Donner une première expression du flux $\phi_0(z, t)$ du champ magnétique créé par le solénoïde dans l'anneau en fonction de $B_0(z, t)$.

22. Donner une seconde expression de ce flux faisant notamment intervenir la mutuelle inductance $M(z)$ et une intensité à préciser.

Force de Laplace

L'anneau se trouve à la cote z .

La force de Laplace sur l'anneau résulte uniquement du champ magnétique créé par le solénoïde.

23. Dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, exprimer les composantes de la force élémentaire de Laplace $d\vec{F}_L$ subie par un élément $d\vec{l}$ de l'anneau en fonction de $i_A(t)$, a , $d\theta$ et des composantes de $\vec{B}(P_{anneau}, t)$.
24. Montrer que la résultante $\vec{F}_L$ de la force de Laplace est selon $\vec{u}_z$.
25. Montrer que $\vec{F}_L(z, t) = i_A(t) i_S(t) \frac{dM}{dz} \vec{u}_z$.

Force électromotrice induite

L'anneau se trouve *maintenu* à la cote z .

26. Donner l'expression de la force électromotrice (fém) induite dans (A) par le champ magnétique créé par (S) en fonction de N , ω , $f_0(z)$ et du temps.
27. Expliciter la réponse en fonction de $i_S(t)$ et de $M(z)$.

Nombre de spires et inductances

28. Dans le cas du solénoïde qui serait supposé de très grande longueur, établir l'expression de son inductance propre L_S en fonction de ses caractéristiques géométriques h_s , b et n_s . Proposer une application numérique pour $h_s = 10$ cm, $b = 3$ cm, et $n_s = 2 \cdot 10^4$ spires par unité de longueur.
29. L'inductance propre d'une spire de l'anneau est notée l_A . Montrer que l'inductance propre de (A) est $L_A = N^2 l_A$.
30. Montrer que l'inductance mutuelle M varie linéairement avec N ; on notera $M = N M_1$. ce qui définit M_1 .

II.B. Modélisations successives

Le but de cette partie est d'interpréter les observations F_1 – F_2 – F_3 . On n'explicite plus la forme du champ $\vec{B}$, seuls interviendront dans les résultats les inductances et les autres paramètres des circuits.

On suppose que l'anneau est fixe (il n'y a pas de variation de flux, et donc de fém associée à un mouvement).

Première approche

On impose $i_S(t) = I_S \cos(\omega t)$.

On suppose provisoirement que l'inductance propre L_A de (A) est nulle mais pas la résistance R_A .

31. Donner l'expression de $i_A(t)$ en fonction de $M(z)$, R_A , I_S , ω et du temps.
32. Donner l'expression de $\vec{F}_L(z, t)$.
33. L'anneau réagit avec un temps de réponse grand par rapport à la période du courant. On suppose alors que l'anneau n'est sensible qu'à la valeur moyenne dans le temps de la résultante des forces de Laplace $\langle \vec{F}_L \rangle_t$. Déterminer $\langle \vec{F}_L \rangle_t$.
34. Que doit-on conclure de cette première approche ?

Deuxième approche

On impose $i_S(t) = I_S \cos(\omega t)$.

On suppose que l'inductance propre L_A de (A) n'est pas nulle mais que la résistance R_A est nulle.

35. Donner l'expression de $i_A(t)$ en fonction de M , L_A , I_S , ω et du temps.
36. Donner l'expression de $\vec{F}_L(z, t)$. On fera intervenir $\frac{d}{dz} M(z)^2$.
37. Déterminer $\langle \vec{F}_L \rangle_t$.
Ce résultat est-il compatible avec l'observation F_1 ?
38. Étudier la dépendance de $\langle \vec{F}_L \rangle_t$ par rapport au nombre de spires N de l'anneau.
L'expression obtenue pour $\langle \vec{F}_L \rangle_t$ est-elle compatible avec l'observation F_2 ?

Troisième approche

Aucune des grandeurs L_A ni R_A n'est supposée nulle.

La tension aux bornes du solénoïde (inductance propre L_S et résistance R_S) est cette fois imposée et vaut $u_S(t) = U_0 \cos(\omega t)$. L'inductance mutuelle est $M(z)$.

39. Écrire la loi des mailles pour le solénoïde et pour l'anneau.

40. On note en représentation complexe $\underline{I}_A$ et $\underline{I}_B$ les amplitudes complexes des intensités $i_A(t)$ et $i_S(t)$.

On note $\underline{Z}_A = R_A + jL_A\omega = |\underline{Z}_A| \exp(j\varphi_A)$, $\underline{Z}_S = R_S + jL_S\omega = |\underline{Z}_S| \exp(j\varphi_S)$, $\underline{Z}_{AS} = jM\omega$ et $(\underline{D})^2 = \underline{Z}_A \underline{Z}_S + M^2\omega^2 = |\underline{D}|^2 \exp(2j\varphi_D)$.

Exprimer $\underline{I}_A$ et $\underline{I}_B$ en fonction de $\underline{Z}_A$, $\underline{D}$, $\underline{Z}_{AS}$ et U_0 .

En déduire les expressions de $i_S(t)$ et $i_A(t)$ en fonction de U_0 , M , $|\underline{Z}_A|$, $|\underline{Z}_S|$, $|\underline{D}|^2$, φ_A , φ_S , φ_D , ω et t .

41. Déterminer $\langle F_L \rangle_t$ en fonction de $\frac{d(M^2)}{dz}$, $|\underline{Z}_A|$, U_0 , $|\underline{D}|^2$, φ_A , φ_S , φ_D et ω .

42. Établir la relation suivante pour la force moyenne subie par un anneau constitué de N spires:

$$\langle F_L \rangle_t \propto \frac{N^2}{[r_A R_S + N\omega^2(M_1^2 - l_A L_S)]^2 + \omega^2(r_A L_S + N l_A R_S)^2}$$

où le symbole « $\propto$ » signifie «est, toutes choses égales par ailleurs, proportionnel à ... ». et r_A est la résistance d'une spire de l'anneau.

43. Application numérique pour un anneau constitué de cuivre : estimer $\frac{F_2}{F_1}$, rapport des forces magnétiques agissant respectivement sur un anneau constitué de deux spires et sur un anneau d'une spire.

Données : $R_S = 2 \Omega$, $L_S = 0,1 \text{ H}$, $M_1 = 5,0 \times 10^{-5} \text{ H}$, $l_A = 1,0 \times 10^{-7} \text{ H}$ (inductance d'une spire de l'anneau), $r_A = 1,0 \times 10^{-4} \Omega$ (résistance d'une spire de l'anneau) et $\omega = 100 \pi \text{ rad s}^{-1}$ (50 Hz).

44. Interpréter F_2 .

45. Interpréter F_3 .

Données : $\mu_{Cu} = 3 \mu_{Al}$ (μ : masse volumique)

$\sigma_{Cu} = 1,7 \sigma_{Al}$ (σ : conductivité électrique)

Fin du sujet